

# Зміст

[Титульна сторінка](#Top_of_9780486248233_03_tit_html)

[Сторінка авторських прав](#Top_of_9780486248233_04_cpy_html)

[Вміст](#Top_of_9780486248233_06_toc_html)

[Розділ 1. Чому математика?](#ch1)

[Розділ 2. Історична орієнтація](#ch2)

[2–1 Вступ](#ch2_1)

[2–2 Математика в ранніх цивілізаціях](#ch2_2)

[2–3 Класичний грецький період](#ch2_3)

[2–4 Олександрійський грецький період](#ch2_4)

[2–5 Індуси та араби](#ch2_5)

[2–6 Рання і середньовічна Європа](#ch2_6)

[2–7 Епоха Відродження](#ch2_7)

[2–8 Розвиток подій з 1550 по 1800 рік](#ch2_8)

[2–9 Події з 1800 року по теперішній час](#ch2_9)

[2–10 Людський аспект математики](#ch2_10)

[Розділ 3. Логіка і математика](#ch3)

[3–1 Вступ](#ch3_1)

[3–2 Поняття математики](#ch3_2)

[3–3 Ідеалізація](#ch3_3)

[3–4 Методи міркування](#ch3_4)

[3–5 Математичне доведення](#ch3_5)

[3–6 Аксіоми та визначення](#ch3_6)

[3–7 Створення математики](#ch3_7)

[Розділ 4. Число: фундаментальна концепція](#ch4)

[4–1 Вступ](#ch4_1)

[4–2 Цілі числа та дроби](#ch4_2)

[4–3 Ірраціональні числа](#ch4_3)

[4–4 Від'ємні числа](#ch4_4)

[4–5 Аксіоми щодо чисел](#ch4_5)

[4–6 Застосування системи числення](#ch4_6)

[Розділ 5. Алгебра, Вища арифметика](#ch5)

[5–1 Вступ](#ch5_1)

[5–2 Мова алгебри](#ch5_2)

[5–3 показники](#ch5_3)

[5–4 Алгебраїчні перетворення](#ch5_4)

[5–5 Рівняння, що включають невідомі](#ch5_5)

[5–6 Загальне рівняння другого ступеня](#ch5_6)

[5–7 Історія рівнянь вищого ступеня](#ch5_7)

[Розділ 6. Природа та використання геометрії Евкліда](#ch6)

[6–1 Початки геометрії](#ch6_1)

[6–2 Зміст евклідової геометрії](#ch6_2)

[6–3 Деякі повсякденні використання евклідової геометрії](#ch6_3)

[6–4 Евклідова геометрія і вивчення світла](#ch6_4)

[6–5 Конічні секції](#ch6_5)

[6–6 Конічні зрізи і світло](#ch6_6)

[6–7 Культурний вплив евклідової геометрії](#ch6_7)

[Розділ 7. Схеми Землі і небес](#ch7)

[7–1 Олександрійський світ](#ch7_1)

[7–2 Основні поняття тригонометрії](#ch7_2)

[7–3 Деякі повсякденні використання тригонометричних співвідношень](#ch7_3)

[7–4 Складання карти землі](#ch7_4)

[7–5 Складання схем небес](#ch7_5)

[7–6 Подальший прогрес у вивченні світла](#ch7_6)

[Розділ 8. Математичний порядок природи](#ch8)

[8–1 Грецька концепція природи](#ch8_1)

[8–2 Догрецькі та грецькі погляди на природу](#ch8_2)

[8–3 Грецькі астрономічні теорії](#ch8_3)

[8–4 Докази математичного проектування природи](#ch8_4)

[8–5 Руйнування грецького світу](#ch8_5)

[Розділ 9. Пробудження Європи](#ch9)

[9–1 Середньовічна цивілізація Європи](#ch9_1)

[9–2 Математика в середньовічний період](#ch9_2)

[9–3 Революційні впливи в Європі](#ch9_3)

[9–4 Нові доктрини епохи Відродження](#ch9_4)

[9–5 Релігійна мотивація у вивченні природи](#ch9_5)

[Розділ 10. Математика і живопис в епоху Відродження](#ch10)

[10–1 Вступ](#ch10_1)

[10–2 Намацування до наукової системи перспективи](#ch10_2)

[10–3 Реалізм веде до математики](#ch10_3)

[10–4 Основна ідея математичної перспективи](#ch10_4)

[10–5 Деякі математичні теореми про перспективне креслення](#ch10_5)

[10–6 Картини епохи Відродження з використанням математичної перспективи](#ch10_6)

[10–7 Інші значення математичної перспективи](#ch10_7)

[Розділ 11. Проективна геометрія](#ch11)

[11–1 Задача, запропонована проекцією та розрізом](#ch11_1)

[11–2 Робота Дезарга](#ch11_2)

[11–3 Робота Паскаля](#ch11_3)

[11–4 Принцип подвійності](#ch11_4)

[11–5 Зв'язок між проективною та евклідовою геометріями](#ch11_5)

[Розділ 12. Геометрія координат](#ch12)

[12–1 Декарт і Ферма](#ch12_1)

[12–2 Необхідність нових методів в геометрії](#ch12_2)

[12–3 Поняття рівняння і кривої](#ch12_3)

[12–4 Парабола](#ch12_4)

[12–5 Знаходження кривої з її рівняння](#ch12_5)

[12–6 Еліпс](#ch12_6)

[12–7 Рівняння поверхонь](#ch12_7)

[12–8 Чотиривимірна геометрія](#ch12_8)

[12–9 Зведення](#ch12_9)

[Розділ 13. Найпростіші формули в дії](#ch13)

[13–1 Оволодіння природою](#ch13_1)

[13–2 Пошук наукового методу](#ch13_2)

[13–3 Науковий метод Галілея](#ch13_3)

[13–4 Функції та формули](#ch13_4)

[13–5 Формули, що описують рух випали об'єктів](#ch13_5)

[13-6 Формули, що описують рух предметів, кинутих вниз.](#ch13_6)

[13–7 Формули руху тіл, що проектуються вгору](#ch13_7)

[Розділ 14. Параметричні рівняння і криволінійний рух](#ch14)

[14–1 Вступ](#ch14_1)

[14–2 Поняття параметричних рівнянь](#ch14_2)

[14–3 Рух снаряда, скинутого з літака](#ch14_3)

[14–4 Рух снарядів, запущених гарматами](#ch14_4)

[14–5 Рух снарядів, випущених під довільним кутом](#ch14_5)

[14–6 Зведення](#ch14_6)

[Розділ 15. Застосування формул до гравітації](#ch15)

[15–1 Революція в астрономії](#ch15_1)

[15–2 Заперечення проти геліоцентричної теорії](#ch15_2)

[15–3 Аргументи на користь геліоцентричної теорії](#ch15_3)

[15–4 Проблема зв'язку земного і небесного рухів](#ch15_4)

[15–5 Нарис життя Ньютона](#ch15_5)

[15–6 Ключова ідея Ньютона](#ch15_6)

[15–7 Маса і вага](#ch15_7)

[15–8 Закон всесвітнього тяжіння](#ch15_8)

[15–9 Подальше обговорення маси і ваги](#ch15_9)

[15–10 Деякі висновки із закону всесвітнього тяжіння](#ch15_10)

[15–11 Обертання Землі](#ch15_11)

[15–12 Гравітація і закони Кеплера](#ch15_12)

[15–13 Наслідки теорії гравітації](#ch15_13)

[Розділ 16. Диференціальне числення](#ch16)

[16–1 Вступ](#ch16_1)

[16–2 Проблеми, що призводять до обчислення](#ch16_2)

[16–3 Концепція миттєвої швидкості зміни](#ch16_3)

[16–4 Поняття миттєвої швидкості](#ch16_4)

[16–5 Метод приростів](#ch16_5)

[16–6 Метод приростів, застосований до загальних функцій](#ch16_6)

[16–7 Геометричний сенс похідної](#ch16_7)

[16–8 Максимальне і мінімальне значення функцій](#ch16_8)

[Розділ 17. Інтегральне числення](#ch17)

[17–1 Порівняння диференціального та інтегрального числення](#ch17_1)

[17–2 Знаходження формули із заданої швидкості зміни](#ch17_2)

[17–3 Застосування до проблем руху](#ch17_3)

[17–4 Області, отримані шляхом інтеграції](#ch17_4)

[17–5 Розрахунок роботи](#ch17_5)

[17–6 Розрахунок швидкості втечі](#ch17_6)

[17–7 Інтеграл як межа суми](#ch17_7)

[17–8 Деякі відповідні історії концепції граничних](#ch17_8)

[17–9 Вік розуму](#ch17_9)

[Розділ 18. Тригонометричні функції та коливальний рух](#ch18)

[18–1 Вступ](#ch18_1)

[18–2 Рух боба на пружині](#ch18_2)

[18–3 Синусоїдальні функції](#ch18_3)

[18–4 Прискорення синусоїдального руху](#ch18_4)

[18–5 Математичний аналіз руху боба](#ch18_5)

[18–6 Зведення](#ch18_6)

[Розділ 19. Тригонометричний аналіз музичних звуків](#ch19)

[19–1 Вступ](#ch19_1)

[19–2 Природа простих звуків](#ch19_2)

[19–3 Спосіб додавання ординат](#ch19_3)

[19–4 Аналіз складних звуків](#ch19_4)

[19–5 Суб'єктивні властивості музичних звуків](#ch19_5)

[Розділ 20. Неевклідові геометрії та їх значення](#ch20)

[20–1 Вступ](#ch20_1)

[20–2 Історична довідка](#ch20_2)

[20–3 Математичний зміст неевклідової геометрії Гаусса](#ch20_3)

[20–4 Неевклідова геометрія Рімана](#ch20_4)

[20–5 Застосовність неевклідової геометрії](#ch20_5)

[20–6 Застосовність неевклідової геометрії за нової інтерпретації прямої](#ch20_6)

[20–7 Неевклідова геометрія та природа математики](#ch20_7)

[20–8 Наслідки неевклідової геометрії для інших галузей нашої культури](#ch20_8)

[Розділ 21. Арифметика та її алгебри](#ch21)

[21–1 Вступ](#ch21_1)

[21–2 Застосовність дійсної системи числення](#ch21_2)

[21–3 Бейсбольна арифметика](#ch21_3)

[21–4 Модульні арифметики та їх алгебри](#ch21_4)

[21–5 Алгебра множин](#ch21_5)

[21–6 Математика та моделі](#ch21_6)

[Розділ 22. Статистичний підхід до соціальних і біологічних наук](#ch22)

[22–1 Вступ](#ch22_1)

[22–2 Короткий історичний огляд](#ch22_2)

[22–3 середніх значення](#ch22_3)

[22–4 Дисперсія](#ch22_4)

[22–5 Графік і нормальна крива](#ch22_5)

[22–6 Припасування формули до даних](#ch22_6)

[22–7 Кореляція](#ch22_7)

[22–8 Застереження щодо використання статистики](#ch22_8)

[Розділ 23. Теорія ймовірностей](#ch23)

[23–1 Вступ](#ch23_1)

[23–2 Імовірність однаково ймовірних результатів](#ch23_2)

[23–3 Імовірність як відносна частота](#ch23_3)

[23–4 Імовірність у неперервній варіації](#ch23_4)

[23–5 Біноміальні розподіли](#ch23_5)

[23–6 Задачі відбору проб](#ch23_6)

[Розділ 24. Природа і значення математики](#ch24)

[24–1 Вступ](#ch24_1)

[24–2 Структура математики](#ch24_2)

[24–3 Значення математики для вивчення природи](#ch24_3)

[24–4 Естетичні та інтелектуальні цінності](#ch24_4)

[24–5 Математика і раціоналізм](#ch24_5)

[24–6 Обмеження математики](#ch24_6)

[Таблиця тригонометричних співвідношень](#tab)

[Відповіді на вибрані та оглядові вправи](#ans)

[Додаткові відповіді та рішення](#add)

[Індекс](#ind)

МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕМАТЕМАТИКА

# МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕМАТЕМАТИКА

МОРРІС КЛАЙН

Професор математики, почесний куратор Інституту математичних наукНью-Йоркського університету

образ

Авторське право © 1967 належить Моррісу Клайну.

Всі права захищені

Це видання в Дуврі, вперше опубліковане в 1985 році, є нескороченим перевиданням роботи, вперше опублікованої Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Редінг, штат Массачусетс, в 1967 році під назвою Математика для вільних мистецтв. До цього видання додано Посібник для інструктора, опублікований разом з оригінальним виданням, що містить додаткові відповіді та рішення проблем у тексті.

Каталогізація Бібліотеки Конгресу в даних публікацій

Клайн, Морріс, 1908–

Математика для нематематика.

Передрук. Вперше опубліковано: Математика для вільних мистецтв. Читання, Массачусетс: Аддісон-Уеслі, © 1967. (Серія Аддісона-Веслі у вступній математиці)

Включає бібліографії та покажчик.

1. Математика—1961— І. Назва.

QA37.2.K6 1985 510 84-25923ISBN-13: 978-0-486-24823-3ISBN-10: 0-486-24823-2

Виготовлено в США корпорацією Courier24823223  
[www.doverpublications.com](http://www.doverpublications.com)

ПЕРЕДМОВА

" . . .Я вважаю, що, не розуміючи такої незрозумілої частини геометрії, як Архімед чи Аполлоній, можна зрозуміти достатньо, щоб допомогти їй у спогляданні природи; і що не потрібно знати найглибших таємниць його, щоб розпізнати його корисність... Мені часто хотілося, щоб я займався спекулятивною частиною геометрії та вдосконаленням спекулятивної [символічної] алгебри, якої мене навчали дуже молодо, значну частину того часу та промисловості, які я витратив на геодезію та фортифікацію...»

РОБЕРТ БОЙЛ

Я так само твердо вірю, як і в минулому, що курс математики, адресований студентам гуманітарних наук, повинен представляти наукове та гуманістичне значення предмета. У той час як власне математика мало приваблює і здається ще менш спрямованою для більшості цих студентів, предмет стає дуже важливим для них, коли він представлений в культурному контексті. Насправді розділи елементарної математики створювалися в першу чергу для обслуговування позаматематичних потреб та інтересів. У самому акті задоволення таких потреб кожне з цих творінь виявилося неоціненним значенням для розуміння людиною природи свого світу і самої себе.

Те, що так багато професорів вирішили викладати математику як невід'ємну частину західної культури, про що свідчить їх прийом моєї попередньої книги «Математика: культурний підхід», було надзвичайно приємним. Ця книга буде доступною й надалі. У теперішньому перегляді та скороченні, яке було розроблено для задоволення потреб окремих груп студентів, дух оригінального тексту зберігся. Історичний підхід був збережений, оскільки він за своєю суттю цікавий, забезпечує мотивацію для введення різних тем і надає узгодженість тілу матеріалу. Кожна тема або галузь математики, що розглядається, виявляється відповіддю на людські інтереси, і представлений культурний імпорт технічного розвитку. Я дотримувався принципу, що рівень строгості повинен відповідати математичному віку студента, а не віку математики.

Як і в попередньому тексті, деякі теми трактуються зовсім не так, як зараз модно. Це реальна система числення, логіка і теорія множин. Я намагався представити ці теми в контексті і з таким рівнем акценту, який, на мою думку, підходить для початкового курсу математики. У цій книзі аксіоматичний підхід до дійсних чисел сформульований після того, як різні типи чисел та їх властивості виводяться з фізичних ситуацій та використання. Трактування логіки обмежується основами арістотелівської логіки. А теорія множин служить ілюстрацією іншого виду алгебри.

Зміни, внесені в цю редакцію, призначені для особливих груп. Деяким студентам потрібно більше переглядати та вивчати елементарні поняття та методи, ніж це передбачено в попередній книзі. Інші, головним чином ті, хто готується до викладання на початковому рівні, повинні дізнатися більше про елементарну математику, ніж охоплені ними курси середньої школи. Викладачі дванадцятирічних курсів середньої школи та односеместрових курсів коледжу часто вважали велику кількість матеріалу з математики: культурний підхід досить бентежною, оскільки вона пропонувала набагато більше, ніж можна було охопити.

Для задоволення потреб цих груп я вніс наступні зміни:

1. Чотири розділи, повністю присвячені культурним впливам, були вилучені. Таким чином, розмір оригінальної книги був значно зменшений.

2. Кілька застосувань математики до науки були опущені, перш за все, для зменшення розміру тексту.

3. Деякі глави на технічні теми, глава 3 про  [логіку та математику,](#ch3)  глава 4 про числа,  [глава 5](#ch4) про елементарну алгебру  [та](#ch5) глава 21 [про арифметику та їх алгебри були розширені.](#ch21)

4. Додаткові вправи на тренування були додані протягом декількох розділів, а набір оглядових вправ, що забезпечують практику в техніці, був доданий до кожного з ряду розділів.

5. Удосконалення презентації були зроблені в ряді місць.

Що стосується використання в курсах, то, ймовірно, справедливо для цього тексту, як і для попереднього, що він містить більше матеріалу, ніж може бути висвітлено в деяких курсах. Однак багато глав, а також розділів глав не є суттєвими для логічної безперервності. Ці глави та розділи були зірками образ. Таким чином[, глава 10 про живопис історично показує, як математики були приведені до проективної геометрії (](#ch10)глава 11), але з логічної точки зору [глава](#ch11) 10 [не потрібна для того, щоб зрозуміти наступну главу.](#ch10) [Глава 19](#ch19) про музичні звуки є застосуванням матеріалу про тригонометричні функції в [главі 18,](#ch18)  але не є суттєвою для безперервності. Дві глави, присвячені обчисленню, не використовуються в наступних розділах. Як би бажано не було дати студентам деяке уявлення про те, про що йдеться в обчисленні, в деяких класах все одно може знадобитися пропустити ці розділи. Те ж саме можна сказати і про глави, присвячених статистиці [(глава 22](#ch22)) і ймовірності ([глава 23](#ch23)).

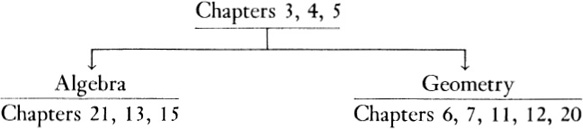
Що стосується розділів всередині глав, [то](#ch6) ілюстрацією цілком може служити глава 6, присвячена евклідової геометрії. Математичний матеріал цієї глави призначений як огляд деяких основних ідей і теорем евклідової геометрії і як вступ до конічних перерізів. Деякі з знайомих додатків наведені в [розділі 6-3](#ch6_3) (див. Зміст) і, ймовірно, їх слід розглянути. Однак заявки на висвітлення в [розділах 6-4](#ch6_4) і  [6-6, а також обговорення культурних впливів у](#ch6_6) розділі 6-7 [можна пропустити.](#ch6_7)

Частину матеріалу, включеного чи ні до наступних рекомендацій для окремих груп, можна залишити для читання учнями. Насправді перші два розділи були навмисно створені для того, щоб їх могли прочитати студенти . Мета тут, крім представлення внутрішньо важливих ідей, полягала в тому, щоб спонукати учнів читати книгу з математики, дати їм впевненість у цьому і привести їх до звички робити це. Здається необхідним протистояти враженню учнів, яке не викликає сумнівів у навчанні математики в початковій та старшій школі, що в той час як тексти з історії слід читати, тексти з математики по суті є настільними книгами для формул та домашніх завдань.

Для курсів, що підкреслюють концепцію чисел та її розширення на алгебру, можна скористатися логічною незалежністю численних глав і використовувати глави з 3  [по](#ch3) 5 з  [міркувань, арифметики та алгебри та](#ch5) глави 21 [з](#ch21) різних алгебр. Щоб продовжити розвиток цієї теми в області функцій, можна включити [глави 13](#ch13) і [15](#ch15).

Курси, що підкреслюють геометрію, можуть використовувати [глави 6,](#ch6) 7, [11](#ch7), 12 [та 20](#ch11)   з евклідової геометрії, тригонометрії, проективної геометрії, геометрії координат та неевклідової геометрії відповідно. Деяка алгебра, розглянута в  [главі](#ch5)  5, задіяна в [главах 7](#ch7) і [12](#ch12). Якщо знання матеріалу глави [5](#ch5) не можна припустити, то цій главі повинна передувати обробка геометрії.

Суть двох попередніх пропозицій може бути сформульована таким чином:



Звичайно, зоряні розділи в цих розділах не є обов'язковими.

Для односеместрового курсу гуманітарних наук основний зміст може бути наступним:

|  |  |
| --- | --- |
| [Розділ 2](#ch2) | за історичною спрямованістю, |
| [Розділ 3](#ch3) | з логіки та математики, |
| [Розділи 4](#ch4) і [5](#ch5) | по системі числення і елементарної алгебри, |
| [Розділ 6](#ch6) | через [розділ 6-5,](#ch6_5) з евклідової геометрії, |
| [Розділ 7](#ch7) | через [розділ 7-3](#ch7_3), з тригонометрії, |
| [Розділ 12](#ch12) | з координатної геометрії, |
| [Розділ 13](#ch13) | про функції та їх використання, |
| [Розділ 14](#ch14) | через [розділ 14-4,](#ch14_4) про параметричні рівняння, |
| [Розділ 15](#ch15) | через [розділи 15-10](#ch15_10) про подальше використання функцій у науці, |
| [Розділ 20](#ch20) | з неевклідової геометрії, |
| [Розділ 21](#ch21) | з різних алгебр. |

Будь-який додатковий матеріал збагатив би курс, але не знадобився б для безперервності.

Хоча проблема вчителя щодо подання матеріалу поза власне математикою набагато простіша з цим текстом, ніж з попереднім, все одно може бути необхідно запевнити його, що йому не потрібно вагатися взятися за це завдання. Відчуття, що треба бути авторитетом у суб'єкті, щоб щось сказати про це, є необґрунтованим. Ми всі миряни поза сферою власної спеціальності, і нам не повинно бути соромно вказати на це студентам. У суміжних областях ми просто даємо вказівки на ідеї, які студенти можуть продовжувати на інших курсах або в самостійному читанні.

Я сподіваюся, що цей текст задовольнить потреби груп студентів, яким він адресований, і що, незважаючи на дещо більший акцент на технічних питаннях, він передасть багате значення математики.

Я хочу подякувати моїй дружині Хелен за її критичне вивчення змісту та сумлінне читання доказів. Я також хочу висловити подяку членам персоналу Аддісона-Уеслі за дуже корисні пропозиції та за їх постійну підтримку культурно-орієнтованого підходу до математики.

|  |  |
| --- | --- |
| Нью-Йорк, 1967 рік | М.К. |

ВМІСТ

[1Чому математика?](#ch1)

[2А Історична орієнтація](#ch2)

[2–1Вступ](#ch2_1)

[2–2Математика в ранніх цивілізаціях](#ch2_2)

[2–3Класичний грецький період](#ch2_3)

[2–4Олександрійський грецький період](#ch2_4)

[2–5Індуси та араби](#ch2_5)

[2–6Рання та середньовічна Європа](#ch2_6)

[2–7Відродження](#ch2_7)

[2–8Події з 1550 по 1800 рр.](#ch2_8)

[2–9Події з 1800 р. по теперішній час](#ch2_9)

[2–10Людський аспект математики](#ch2_10)

[3Логіка і математика](#ch3)

[3–1Вступ](#ch3_1)

[3–2Поняття математики](#ch3_2)

[3–3Ідеалізація](#ch3_3)

[3–4Методи міркування](#ch3_4)

[3–5Математичне доведення](#ch3_5)

[3–6Аксіоми та визначення](#ch3_6)

[3–7Створення математики](#ch3_7)

[4Число: фундаментальна концепція](#ch4)

[4–1Вступ](#ch4_1)

[4–2Цілі числа та дроби](#ch4_2)

[4–3Ірраціональні числа](#ch4_3)

[4–4Від'ємні числа](#ch4_4)

[4–5Аксіоми щодо чисел](#ch4_5)

образ [4–6Застосування системи числення](#ch4_6)

[5Алгебра, Вища арифметика](#ch5)

[5–1Вступ](#ch5_1)

[5–2Мова алгебри](#ch5_2)

[5–3Показники](#ch5_3)

[5–4Алгебраїчні перетворення](#ch5_4)

[5–5Рівняння за участю невідомих](#ch5_5)

[5–6Загальне рівняння другого ступеня](#ch5_6)

образ [5–7Історія рівнянь вищого ступеня](#ch5_7)

[6Природа та використання евклідової геометрії](#ch6)

[6–1Початки геометрії](#ch6_1)

[6–2Зміст евклідової геометрії](#ch6_2)

[6–3Деякі повсякденні використання евклідової геометрії](#ch6_3)

образ [6–4Евклідова геометрія і вивчення світла](#ch6_4)

[6–5Конічні секції](#ch6_5)

образ [6–6Конічні розрізи і світло](#ch6_6)

образ [6–7Культурний вплив геометрії Евкліда](#ch6_7)

[7Схеми Землі і небес](#ch7)

[7–1Олександрійський світ](#ch7_1)

[7–2Основні поняття тригонометрії](#ch7_2)

[7–3Деякі повсякденні використання тригонометричних співвідношень](#ch7_3)

образ [7–4Складання схем Землі](#ch7_4)

образ [7–5Складання схем небес](#ch7_5)

образ [7–6Подальший прогрес у вивченні світла](#ch7_6)

[8Математичний порядок природи](#ch8)

[8-1Грецька концепція природи](#ch8_1)

[8-2Догрецькі та грецькі погляди на природу](#ch8_2)

[8–3Грецькі астрономічні теорії](#ch8_3)

[8–4Докази математичного проектування природи](#ch8_4)

[8–5Руйнування грецького світу](#ch8_5)

образ [9Пробудження Європи](#ch9)

[9–1Середньовічна цивілізація Європи](#ch9_1)

[9–2Математика в середньовіччі](#ch9_2)

[9–3Революційні впливи в Європі](#ch9_3)

[9–4Нові вчення епохи Відродження](#ch9_4)

[9–5Релігійна мотивація у вивченні природи](#ch9_5)

образ [10Математика і живопис в епоху Відродження](#ch10)

[10–1Вступ](#ch10_1)

[10–2Навпомацки до наукової системи перспективи](#ch10_2)

[10–3Реалізм веде до математики](#ch10_3)

[10–4Основна ідея математичної перспективи](#ch10_4)

[10–5Деякі математичні теореми про перспективне креслення](#ch10_5)

[10–6Картини епохи Відродження з використанням математичної перспективи](#ch10_6)

[10–7Інші значення математичної перспективи](#ch10_7)

[11Проективна геометрія](#ch11)

[11–1Задача, запропонована проекцією та розрізом](#ch11_1)

[11–2Робота Дезарга](#ch11_2)

[11–3Робота Паскаля](#ch11_3)

[11–4Принцип подвійності](#ch11_4)

[11–5Зв'язок між проективною та евклідовою геометріями](#ch11_5)

[12Геометрія координат](#ch12)

[12–1Декарт і Ферма](#ch12_1)

[12–2Необхідність нових методів в геометрії](#ch12_2)

[12–3Поняття рівняння і кривої](#ch12_3)

[12–4Парабола](#ch12_4)

[12–5Знаходження кривої з рівняння](#ch12_5)

[12–6Еліпс](#ch12_6)

образ [12–7Рівняння поверхонь](#ch12_7)

образ [12–8Чотиривимірна геометрія](#ch12_8)

[12–9Зведення](#ch12_9)

[13Найпростіші формули в дії](#ch13)

[13–1Оволодіння природою](#ch13_1)

[13–2Пошук наукового методу](#ch13_2)

[13–3Науковий метод Галілея](#ch13_3)

[13–4Функції та формули](#ch13_4)

[13–5Формули, що описують рух об'єктів, що випали](#ch13_5)

[13–6Формули, що описують рух предметів, кинутих вниз.](#ch13_6)

[13–7Формули руху тіл, що проектуються вгору](#ch13_7)

[14Параметричні рівняння та криволінійний рух](#ch14)

[14–1Вступ](#ch14_1)

[14–2Поняття параметричних рівнянь](#ch14_2)

[14–3Рух снаряда, скинутого з літака](#ch14_3)

[14–4Рух снарядів, запущених гарматами](#ch14_4)

образ [14–5Рух снарядів, випущених під довільним кутом](#ch14_5)

[14–6Зведення](#ch14_6)

[15Застосування формул до гравітації](#ch15)

[15–1Революція в астрономії](#ch15_1)

[15–2Заперечення проти геліоцентричної теорії](#ch15_2)

[15–3Аргументи на користь геліоцентричної теорії](#ch15_3)

[15–4Проблема зв'язку земного і небесного рухів](#ch15_4)

[15–5А Нарис життя Ньютона](#ch15_5)

[15–6Ключова ідея Ньютона](#ch15_6)

[15–7Маса і вага](#ch15_7)

[15–8Закон всесвітнього тяжіння](#ch15_8)

[15–9Подальше обговорення маси і ваги](#ch15_9)

[15–10Деякі висновки із закону всесвітнього тяжіння](#ch15_10)

образ [15–11Обертання Землі](#ch15_11)

образ [15–12Гравітація і закони Кеплера](#ch15_12)

образ [15–13Наслідки теорії гравітації](#ch15_13)

образ [16Диференціальне числення](#ch16)

[16–1Вступ](#ch16_1)

[16–2Проблеми, що призводять до обчислення](#ch16_2)

[16–3Поняття миттєвої швидкості зміни](#ch16_3)

[16-4Поняття миттєвої швидкості](#ch16_4)

[16–5Метод приростів](#ch16_5)

[16–6Метод приростів, застосований до загальних функцій](#ch16_6)

[16–7Геометричний сенс похідної](#ch16_7)

[16–8Максимальне і мінімальне значення функцій](#ch16_8)

образ [17Інтегральне числення](#ch17)

[17–1Порівняння диференціального та інтегрального числення](#ch17_1)

[17–2Знаходження формули із заданої швидкості зміни](#ch17_2)

[17–3Застосування до проблем руху](#ch17_3)

[17–4Області, отримані шляхом інтеграції](#ch17_4)

[17–5Розрахунок роботи](#ch17_5)

[17–6Розрахунок швидкості втечі](#ch17_6)

[17–7Інтеграл як межа суми](#ch17_7)

[17–8Деякі актуальні історії концепції межі](#ch17_8)

[17–9Вік розуму](#ch17_9)

[18Тригонометричні функції та коливальний рух](#ch18)

[18–1Вступ](#ch18_1)

[18–2Рух боба по пружині](#ch18_2)

[18–3Синусоїдальні функції](#ch18_3)

[18–4Прискорення синусоїдального руху](#ch18_4)

[18–5Математичний аналіз руху боба](#ch18_5)

[18–6Зведення](#ch18_6)

образ [19Тригонометричний аналіз музичних звуків](#ch19)

[19–1Вступ](#ch19_1)

[19-2Природа простих звуків](#ch19_2)

[19–3Спосіб складання ординат](#ch19_3)

[19–4Аналіз складних звуків](#ch19_4)

[19–5Суб'єктивні властивості музичних звуків](#ch19_5)

[20Неевклідові геометрії та їх значення](#ch20)

[20–1Вступ](#ch20_1)

[20–2Історична довідка](#ch20_2)

[20–3Математичний зміст неевклідової геометрії Гаусса](#ch20_3)

[20–4Неевклідова геометрія Рімана](#ch20_4)

[20–5Застосовність неевклідової геометрії](#ch20_5)

[20–6Застосовність неевклідової геометрії за нової інтерпретації прямої](#ch20_6)

[20–7Неевклідова геометрія і природа математики](#ch20_7)

[20–8Наслідки неевклідової геометрії для інших галузей нашої культури](#ch20_8)

[21Арифметика та її алгебри](#ch21)

[21–1Вступ](#ch21_1)

[21–2Застосовність дійсної системи числення](#ch21_2)

[21–3Бейсбольна арифметика](#ch21_3)

[21–4Модульні арифметики та їх алгебри](#ch21_4)

[21–5Алгебра множин](#ch21_5)

[21–6Математика та моделі](#ch21_6)

образ [22Статистичний підхід до соціальних і біологічних наук](#ch22)

[22–1Вступ](#ch22_1)

[22–2Короткий історичний огляд](#ch22_2)

[22–3Середні показники](#ch22_3)

[22–4Дисперсія](#ch22_4)

[22–5Графік і нормальна крива](#ch22_5)

[22–6Припасування формули до даних](#ch22_6)

[22–7Кореляція](#ch22_7)

[22–8Застереження щодо використання статистики](#ch22_8)

образ [23Теорія ймовірностей](#ch23)

[23–1Вступ](#ch23_1)

[23–2Імовірність однаково ймовірних результатів](#ch23_2)

[23–3Імовірність як відносна частота](#ch23_3)

[23–4Імовірність у неперервній варіації](#ch23_4)

[23–5Біноміальні розподіли](#ch23_5)

[23–6Проблеми відбору проб](#ch23_6)

[24Природа та значення математики](#ch24)

[24–1Вступ](#ch24_1)

[24–2Структура математики](#ch24_2)

[24–3Значення математики для вивчення природи](#ch24_3)

[24–4Естетичні та інтелектуальні цінності](#ch24_4)

[24–5Математика і раціоналізм](#ch24_5)

[24–6Обмеження математики](#ch24_6)

[Таблиця тригонометричних співвідношень](#tab)

[Відповіді на вибрані та оглядові вправи](#ans)

[Додаткові відповіді та рішення](#add)

[Індекс](#ind)

МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕМАТЕМАТИКА

## РОЗДІЛ 1

ЧОМУ МАТЕМАТИКА?

У математиці я не можу сказати про недоліки, за винятком того, що люди недостатньо розуміють відмінне використання чистої математики...

ФРЕНСІС БАКОН

Можна мудро сумніватися, чи варто вивчення математики, і можна знайти хороший авторитет, щоб підтримати його. Ще близько 400 року н.е. святий Августин, єпископ Гіппо в Африка році і один з великих батьків християнства, сказав наступне:

Добрий християнин повинен остерігатися математиків і всіх тих, хто робить порожні пророцтва. Вже існує небезпека, що математики уклали завіт з дияволом, щоб затьмарити дух і замкнути людину в путах пекла.

Можливо, святий Августин, маючи пророче розуміння конфліктів, які мали виникнути пізніше між математично налаштованими вченими останніх століть і релігійними лідерами, прагнув перешкодити подальшому розвитку предмета. У всякому разі, немає жодних сумнівів щодо його ставлення.

Приблизно в той же час, коли жив святий Августин, римські юристи постановили, відповідно до Кодексу математиків і злочинців, що «вчитися мистецтву геометрії і брати участь у публічних вправах, мистецтві, такому ж проклятому, як математика, заборонено».

Навіть видатний учасник математики сімнадцятого століття Блез Паскаль після вивчення людства вирішив, що чисті науки їй не підходять. У листі до Ферма, написаному 10 серпня 1660 року, Паскаль говорить: «Щоб вільно говорити про математику, я вважаю це найвищим вправою духу; але в той же час я знаю, що це настільки марно, що я мало роблю різницю між людиною, яка є лише математиком, і звичайним ремісником. Крім того, я називаю це найкрасивішою професією у світі; але це лише професія; і я часто казав, що добре намагатися [вивчати математику], але не використовувати наші сили: щоб я не зробив двох кроків для математики, і я впевнений, що ви твердо дотримуєтесь моєї думки». Знаменита настанова Паскаля звучала так: «Упокорюйся, безсилий розуму».

Філософ Артур Шопенгауер, який зневажав математику, сказав багато гидоти про предмет, серед іншого, що найнижчою активністю духу є арифметика, про що свідчить той факт, що її може виконувати машина. Багато інших великих людей, наприклад, поет Йоганн Вольфганг Гете та історик Едвард Гіббон, відчували те ж саме і не соромилися висловлюватися. І тому студент, якому не подобається предмет, може претендувати на те, щоб бути в хорошій, якщо не сказати живій, компанії.

З огляду на підтримку, яку він може отримати від влади, учень цілком може запитати, чому його просять вивчати математику. Чи не тому, що Платон близько 2300 років тому виступав за математику, щоб навчити розум філософії? Чи не тому, що Церква в середньовіччі викладала математику як підготовку до богословських міркувань? Чи тому, що комерційне, промислове та наукове життя західного світу так потребує математики? Можливо, предмет потрапив в навчальну програму помилково, і ніхто не потрудився його викинути. Безумовно, учень виправданий, ставлячи своєму вчителю саме те питання, яке Мефістофель поставив Фаусту:

Чи правильно, питаю, чи це навіть розсудливість,

Нудьгувати і втомлювати учнів?

Можливо, нам слід почати наші відповіді на ці запитання з того, що люди, яких ми називали неприязними або несхвалюючими математикою, були дійсно винятковими. У великі періоди культури, що передували нинішньому, майже всі освічені люди цінували математику. Греки, які створили сучасне поняття математики, однозначно відгукувалися про її важливість. У середні віки та в епоху Відродження математика ніколи не оскаржувалася як одне з найважливіших досліджень. Сімнадцяте століття рясніло не тільки математичною діяльністю, але і народним інтересом до предмета. У нас є приклад Самуїла Пепіса, настільки залученого швидко зростаючим впливом математики, що у віці тридцяти років він більше не міг терпіти власного невігластва і благав вивчити предмет. Починав він, до речі, з таблиці множення, яку згодом викладав дружині. У 1681 році Пепіс був обраний президентом Королівського товариства, цей пост пізніше зайняв Ісаак Ньютон.

Переглядаючи літературу вісімнадцятого століття, вражаєш той факт, що журнали, які були на рівні нашого Harper's і Atlantic Monthly, містили математичні статті поруч з літературними статтями. Освічені чоловік і жінка вісімнадцятого століття знали математику свого часу, відчували себе зобов'язаними бути в курсі всіх важливих наукових розробок і читати статті про них так само, як сучасна людина читає статті про політику. Ці люди були так само вдома з математикою і фізикою Ньютона, як і з поезією Папи.

Значно зросле значення математики в наш час робить ще більш необхідним, щоб сучасна людина знала щось про природу і роль математики. Це правда, що роль математики в нашій цивілізації не завжди очевидна, а більш глибокі і складні сучасні додатки не легко осягають навіть фахівці. Але сутнісну природу і досягнення предмета все ще можна зрозуміти.

Можливо, ми зможемо легше зрозуміти, чому слід вивчати математику, якщо ми приділимо хвилинку, щоб розглянути, що таке математика. На жаль, відповідь не може бути дана в одному реченні або в одному розділі. Предмет має багато граней або, хтось може сказати, є головою Гідри. Можна розглядати математику як мову, як особливий вид логічної структури, як сукупність знань про числа і простір, як ряд методів виведення висновків, як сутність наших знань про фізичний світ або просто як забавну інтелектуальну діяльність. Кожну з цих особливостей було б важко точно описати в короткому просторі.

Оскільки неможливо дати стисле і легко зрозуміле визначення математики, деякі письменники припускають, досить ухильно, що математика - це те, чим займаються математики. Але математики - це люди, і більшість речей, які вони роблять, нецікаві, а деякі, соромляться пов'язувати. Єдина заслуга в цьому запропонованому визначенні математики полягає в тому, що воно вказує на той факт, що математика є людським творінням.

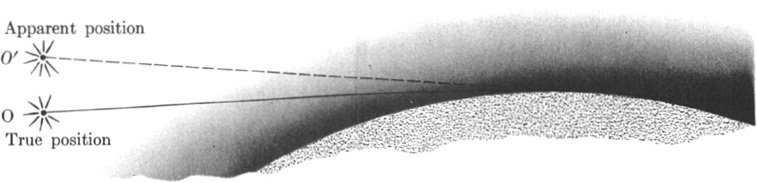
Варіацією наведеного вище визначення, яке обіцяє більше допомоги в розумінні природи, змісту та цінностей математики, є те, що математика - це те, що робить математика. Якщо ми розглянемо математику з точки зору того, для чого вона призначена і чого досягає, ми, безсумнівно, отримаємо більш правдиву і ясну картину предмета.

Математика займається насамперед тим, чого можна досягти за допомогою міркувань. І тут ми стикаємося з першою перешкодою. Чому слід міркувати? Це не природне заняття для людської тварини. Зрозуміло, що не потрібні міркування, щоб навчитися їсти або виявити, які продукти підтримують життя. Людина вміла годувати, одягати і давати собі житло за тисячоліття до того, як існувала математика. Уживатися з протилежною статтю - це швидше мистецтво, ніж наука, освоєна міркуваннями. Можна займатися безліччю професій і навіть підніматися високо в діловому та промисловому світі без особливого використання міркувань і, звичайно, без математики. Соціальне становище людини навряд чи підніметься завдяки прояву його знань з тригонометрії. Насправді, цивілізації, в яких міркування і математика не грали ніякої ролі, вижили і навіть процвітали. Якби хтось був готовий міркувати, він міг би з готовністю надати докази, щоб довести, що міркування є незамінною діяльністю.

Ті, хто виступає проти міркувань, з готовністю вкажуть на інші методи отримання знань. Більшість людей насправді переконані, що їх почуття дійсно більш ніж адекватні. Дуже поширене твердження «бачити - значить вірити» виражає загальну залежність від почуттів. Але кожен повинен визнати, що почуття обмежені і часто помилкові, і, навіть там, де це точно, повинні бути інтерпретовані. Розглянемо для прикладу почуття зору. Наскільки велике сонце? Наші очі говорять нам, що він приблизно такий же великий, як гумовий м'яч. Отже, це те, у що ми повинні вірити. З іншого боку, ми не бачимо повітря навколо нас, і якщо на те пішло, ми не можемо його відчувати, торкатися, нюхати або пробувати на смак. Тому ми не повинні вірити в існування повітря.

Щоб розглянути дещо складнішу ситуацію, припустимо, що вчитель повинен підняти пір'яну ручку і запитати: «Що це? Студент, вихідець з якогось примітивного суспільства, може назвати це блискучою паличкою, і насправді це те, що бачать очі. Ті, хто називає це пір'яною ручкою, дійсно закликають до освіти та досвіду, збережених у їхній свідомості. Так само, коли ми дивимося на високу будівлю здалеку, це досвід, який говорить нам, що будівля висока. Звідси стара приказка, що «ми схильні бачити те, що ховається за нашими очима, а не те, що перед ними постає».

Кожен день ми бачимо сонце там, де його немає. Приблизно за п'ять хвилин до того, що ми називаємо заходом сонця, Сонце насправді знаходиться нижче геометричного горизонту і тому має бути невидимим. Але промені світла від Сонця вигинаються до нас, коли вони рухаються в земній атмосфері, і спостерігач на P (рис. 1-1[) не тільки «бачить» сонце, але і думає, що світло йде з напрямку](#fig1_1) O′P. Тому він вважає, що сонце знаходиться в цьому напрямку.



Малюнок 1–1.  
Відхилення променя від земної атмосфери.

Органи чуття, очевидно, безпорадні в отриманні деяких видів знань, таких як відстань до Сонця, розмір Землі, швидкість кулі (якщо тільки не хочеться відчути її швидкість), температура Сонця, передбачення затемнень і десятки інших фактів.

Якщо органи чуття неадекватні, як щодо експериментів або, в простих випадках, вимірювання? За допомогою таких засобів можна і насправді можна багато чому навчитися. Але припустимо, що потрібно знайти дуже просту величину, площа прямокутника. Щоб отримати його шляхом вимірювання, можна було б відкласти одиничні квадрати, щоб покрити площу, а потім підрахувати кількість квадратів. Хоча б трохи простіше виміряти довжини сторін і потім скористатися формулою, отриманою шляхом міркувань, а саме, що площа - це твір довжини на ширину. У єдиній трохи складнішій задачі визначення того, наскільки високо піде снаряд, ми, звичайно, не повинні розглядати подорож зі снарядом.

Що стосується експериментів, то розглянемо відносно просту проблему сучасної техніки. Хочеться побудувати міст через річку. Якої довжини і якої товщини має бути багато балок? Яку форму повинен прийняти міст? Якщо він повинен підтримуватися кабелями, якої довжини і якої товщини вони повинні бути? Звичайно, можна було довільно вибрати ряд довжин і товщин для балок і кабелів і побудувати міст. У цьому випадку було б справедливо, щоб експериментатор першим перетнув цей міст.

З цієї короткої дискусії може бути зрозуміло, що почуття, вимірювання та експерименти, якщо розглядати три альтернативні способи отримання знань, аж ніяк не є адекватними в різних ситуаціях. Міркування мають важливе значення. Юрист, лікар, вчений та інженер щодня використовують міркування, щоб отримати знання, які інакше не були б отримані або, можливо, отримані лише за великі витрати та зусилля. Математика більше, ніж будь-яке інше людське починання, покладається на міркування для отримання знань.

Хтось може бути готовий прийняти той факт, що математичні міркування є ефективною процедурою. Але чого прагне досягти математика своїми міркуваннями? Основна мета всієї математичної роботи полягає в тому, щоб допомогти людині вивчати природу, і в цьому починанні математика співпрацює з наукою. Отже, може здатися, що математика є лише корисним інструментом і що справжнім заняттям є наука. Ми не будемо намагатися на цьому етапі розділити ролі математики і науки і оцінити відносні переваги їх внеску. Ми просто скажемо, що їхні методи різні і що математика є принаймні рівноправним партнером з наукою.

Ми побачимо пізніше, як спостереження за природою оформлені у висловлюваннях, званих аксіомами. Потім математика розкриває міркуваннями таємниці, які, можливо, природа ніколи не мала наміру розкрити. Визначення закономірності руху небесних тіл, відкриття і управління радіохвилями, розуміння молекулярних, атомних і ядерних структур, створення штучних супутників - це лише деякі в основному математичні досягнення. Математичне формулювання фізичних даних і математичні методи виведення нових висновків є сьогодні субстратом у всіх дослідженнях природи.

Той факт, що математика має центральне значення у вивченні природи, виявляє практично відразу кілька значень цього предмета. Перше - практична цінність. Будівництво мостів і хмарочосів, використання енергії води, вугілля, електрики і атома, ефективне використання світла, звуку і радіо в освітленні, зв'язку, навігації і навіть розвагах, а також вигідне застосування хімічних знань при проектуванні матеріалів, у виробництві корисних форм нафти і в медицині - це лише деякі з уже досягнутих практичних досягнень. А майбутнє обіцяє затьмарити минуле.

Однак матеріальний прогрес не є найвагомішою причиною вивчення природи, і практичні результати, як правило, не є результатом досліджень, спрямованих таким чином. Насправді, перебільшувати практичні цінності означає випускати з уваги більшу значимість людської думки. Більш глибока причина вивчення природи полягає в тому, щоб спробувати зрозуміти шляхи природи, тобто задовольнити чисту інтелектуальну цікавість. Дійсно, ставити безкорисливі питання про природу - одна з відмінних рис людства. У всіх цивілізаціях деякі люди принаймні намагалися відповісти на такі питання, як: Як виник Всесвіт? Скільки років Всесвіту і Землі зокрема? Наскільки великі Сонце і Земля? Людина - це випадковість чи частина більшої конструкції? Чи продовжить функціонувати Сонячна система або Земля коли-небудь впаде в Сонце? Що таке світло? Звичайно, не всіх людей цікавлять такі питання. Їжі, даху над головою, сексу та телебачення достатньо, щоб багато хто був щасливий. Але інші, усвідомлюючи всеосяжні природні таємниці, сильніше одержимі їх розгадкою, ніж будь-яка ділова людина, щоб придбати багатство і владу.

Крім поліпшення матеріального життя людини і крім задоволення інтелектуальної допитливості, вивчення природи пропонує нематеріальні цінності іншого роду, особливо скасування страху і терору і заміну їх глибоким, спокійним задоволенням шляхів природи. Для неосвічених і непосвячених у світі науки багато проявів природи виявилися агентами знищення, посланими розгніваними богами. Деякі вірування в античній і навіть середньовічній Європі можуть представляти особливий інтерес з огляду на те, що сталося пізніше. Сонце було центром всього живого. З наближенням зими і скороченням днів люди вірили, що відбувається битва між богами світла і темряви. Таким чином, бог Водан повинен був їхати по небу на білому коні, за яким слідували демони, всі з яких шукали будь-яку можливість завдати шкоди людям. Коли, однак, дні почали подовжуватися і сонце починало щодня показувати себе все вище на небі, люди вірили, що боги світла перемогли. Вони припинили будь-яку роботу і святкували цю перемогу. Доброякісним богам приносили жертви. Символи родючості, такі як фрукти і горіхи, чиєму зростанню, звичайно, сприяє сонце, були розміщені на вівтарях. Щоб символізувати подальше прагнення до світла і радість від світла, у вогонь клали величезну поліно, щоб горіло протягом дванадцяти днів, а для підвищення яскравості запалювали свічки.

Вірування та забобони, які були пов'язані з подіями, які ми приймаємо кроком, неймовірні для сучасної людини. Затемнення сонця, загроза для продовження світла і тепла, що призводить до росту сільськогосподарських культур, означало, що небесне тіло поглинає дракон. Багато індуїстів вірять сьогодні, що демон, який живе на небі, час від часу нападає на сонце і що саме це викликає затемнення. Звичайно, коли за молитвами, жертвоприношеннями та церемоніями слідувала перемога сонця чи місяця, було зрозуміло, що ці ритуали були ефективним засобом, і тому їх потрібно було проводити з кожного такого приводу. Крім того, спеціальні чарівні зілля, випиті під час затемнень, страхували здоров'я, щастя і мудрість.

Для первісних народів минулого грім, блискавка і буря були покараннями, які боги відвідували людей, які, очевидно, якимось чином згрішили. Історії в Старому Завіті про потоп і руйнування Содому і Гоморри вогнем і сіркою є прикладами таких актів гніву з боку Бога євреїв. Тому постійно існувала стурбованість і навіть страх щодо того, що боги можуть мати на увазі для безпорадних людей. Єдиним засобом захисту було умилостивити божественні сили, щоб вони приносили удачу, а не зло.

Страхи, страх і забобони були усунені, принаймні в нашій західній цивілізації, лише тими інтелектуально допитливими людьми, які вивчали могутні прояви природи. Ці «здавалося б, невигідні розваги спекулятивних мізків» звільнили нас від кріпацтва, дали нам неомріяні повноваження і, по суті, замінили негативні доктрини позитивними математичними законами, які виявляють дивовижний порядок і однаковість у природі. Людина стала гордим володарем знань, які дозволили їй дивитися на природу спокійно і об'єктивно. Затемнення сонця, що відбувається за розкладом, більше не привід для тремтіння, а для тихого задоволення від того, що ми знаємо шляхи природи. Дихаємо вільно, знаючи, що природа не буде свавільною або примхливою.

Дійсно, людина досягла надзвичайних успіхів у вивченні природи. Кажуть, що історія повторюється, але, в цілому, обставини передбачуваного повторення не такі, як у більш раннього випадку. Як наслідок, історія людства виявилася не надто ефективним дороговказом на майбутнє. Природа добріша. Коли природа повторюється, а робить вона це постійно, повторення є точними факсиміле попередніх подій, і тому людина може передбачити поведінку природи і бути готовим до того, що станеться. Ми навчилися розпізнавати закономірності природи і можемо сьогодні говорити про однаковість природи і захоплення регулярністю її поведінки.

Успіхи математики у вивченні неживої природи надихнули останнім часом на математичне вивчення людської природи. Математика не тільки сприяла дуже практичним інститутам, таким як банківська справа, страхування, пенсійні системи тощо, але вона також надала певний зміст, дух і методологію молодим наукам економіки, політики та соціології. Кількість, кількісні дослідження і точні міркування замінили розпливчасті, суб'єктивні і неефективні припущення і вже дали докази більшої цінності в майбутньому.

Коли людина звертається до думок про себе і ближніх, до неї приходять інші питання, які є настільки ж фундаментальними, наскільки будь-які з тих, які вона може поставити. Чому народжується людина? Яким цілям він служить або повинен служити? Яке майбутнє його чекає? Знання, отримані про наш фізичний всесвіт, мають глибокі наслідки для походження та ролі людини. Більше того, оскільки математика та наука накопичували все більше знань та сили, вони поступово охоплювали біологічні та психологічні науки, які, у свою чергу, пролили подальше світло на фізичне та психічне життя людини. Таким чином, математика і наука глибоко вплинули на філософію і релігію.

Можливо, найглибшими питаннями у сфері філософії є: що таке істина і як людина її набуває? Хоча ми не маємо остаточної відповіді на ці питання, внесок математики в цю мету має першорядне значення. Протягом двох тисячоліть математика була яскравим прикладом істин, виявлених людиною. Звідси всі дослідження проблеми отримання істин обов'язково враховуються з математикою. Хоча деякі вражаючі події в дев'ятнадцятому столітті повністю змінили наше розуміння природи математики, ефективність предмета, особливо в представленні та аналізі природних явищ, все ще зберігає математику в центрі всіх досліджень природи знання. Не менш важливим аспектом цієї цінності математики було розуміння, яке вона дала нам про шляхи та сили людського розуму. Математика є найвищим і найчудовішим прикладом сили розуму справлятися з проблемами, і як така вона гідна вивчення.

Серед цінностей, які пропонує математика, є її послуги мистецтву. Більшість людей схильні вважати, що мистецтво не залежить від математики, але ми побачимо, що математика створила основні стилі живопису та архітектури, а служіння, яке математика надає музиці, не тільки дозволило людині зрозуміти її, але й поширило її насолоду на всі куточки нашої земної кулі.

Практичні, наукові, філософські та художні проблеми змусили людей досліджувати математику. Але є ще один мотив, настільки ж сильний, як і будь-який з них, — пошук прекрасного. Математика - це мистецтво, і як таке дає задоволення, які дозволяють собі всі мистецтва. Це останнє твердження може стати шоком для людей, які звикли до загальноприйнятої концепції справжніх мистецтв і подумки протиставляють їх математиці на шкоду останній. Але середньостатистична людина ще не продумав, що таке мистецтво насправді і що вони пропонують. Все, що багато людей насправді бачать в живописі, наприклад, це знайомі сцени і, можливо, яскраві кольори. Ці якості, однак, не є тими, які роблять живопис мистецтвом. Справжні цінності повинні бути вивчені, і справжня оцінка мистецтва вимагає багато вивчення.

Тим не менш, ми не будемо наполягати на естетичних цінностях математики. Можливо, було б справедливіше спертися на позицію, що так само, як є глухі та дальтоніки люди, так само можуть бути й ті, хто темпераментно нетерпимий до холодної аргументації та, здавалося б, надмірно тонких відмінностей математики.

Багатьом людям математика пропонує інтелектуальні виклики, і добре відомо, що такі виклики захоплюють людей. Популярні такі ігри, як бридж, кросворди і магічні квадрати. Можливо, найкращим доказом є привабливість таких головоломок, як наступні: вовк, коза і капуста повинні бути перевезені через річку людиною в човні, який може вмістити тільки одну з них, крім людини. Як він може перенести їх поперек, щоб вовк не з'їв козу або козел капусту? Двом чоловікам і двом дружинам доводиться перепливати річку на човні, який може вмістити тільки двох чоловік. Як вони можуть перетнутися так, щоб жодна жінка не була в компанії чоловіка, якщо її чоловік також не присутній? Такі загадки сягають грецьких і римських часів. Математик Тарталья, який жив у шістнадцятому столітті, розповідає, що це були розваги після обіду.

Люди дійсно реагують на інтелектуальні виклики, і як тільки людина отримує невеликий старт в математиці, вона стикається з ними в достатку. З огляду на додаткові цінності, які можна отримати від предмета, можна було б очікувати, що люди будуть витрачати час на математичні задачі, на відміну від більш поверхневих, а в деяких випадках і дешевих ігор, яким не вистачає глибини, краси і важливості. Дражливе і переконливе прагнення до математичних задач пропонує розумове заглиблення, душевний спокій серед нескінченних викликів, спокій у діяльності, битву без конфліктів і красу, яку нестаріючі гори представляють почуттям, випробувані калейдоскопічним поривом подій. Привабливість, пропоновану відстороненістю і об'єктивністю математичних міркувань, чудово описана Бертраном Расселом.

Віддалені від людських пристрастей, віддалені навіть від жалюгідних фактів природи, покоління поступово створили впорядкований космос, де чиста думка може жити, як у своєму природному домі, і де один, принаймні, з наших благородніших поривів може вирватися з тужливого вигнання реального світу.

Створення і споглядання математики пропонують такі цінності.

Незважаючи на всі ці аргументи для вивчення математики, у читача можуть виникнути виправдані сумніви. Ідея про те, що роздуми про числа і цифри ведуть до глибоких і потужних висновків, які впливають майже на всі інші галузі думки, може здатися неймовірною. Вивчення чисел і геометричних фігур може здатися недостатньо привабливим і перспективним підприємством. Навіть засновники математики не передбачали можливостей предмета.

Отже, ми почнемо з деяких сумнівів щодо цінності нашого підприємства. Ми могли б підбадьорити читача заїждженою максимою, нічого не ризикнув, нічого не виграв. Ми могли б звернути його увагу на щоденне свідчення про силу математики, яке пропонує майже кожна газета і журнал. Але такі заклики навряд чи надихають. Давайте продовжимо на дуже слабкій основі, що, можливо, ті, хто більш досвідчений у тому, що може запропонувати світ, також можуть мати мудрість, щоб рекомендувати гідні дослідження.

Отже, незважаючи на святого Августина, читачеві пропонується спокусити пекло і прокляття, зайнявшись вивченням предмета. Звичайно, він може бути впевнений, що предмет знаходиться в його руках і що для вивчення математики не потрібні особливі дари або якості розуму. Навіть дискусійно, чи створення математики вимагає особливих талантів, як створення музики чи великих картин, але, звичайно, оцінка того, що зробили інші, не вимагає «математичного розуму» більше, ніж оцінка мистецтва вимагає «художнього розуму». Більше того, оскільки ми не будемо спиратися на будь-які раніше набуті знання, навіть цього потенційного джерела неприємностей не виникне.

Давайте розглянемо наші цілі. Нам хотілося б зрозуміти, що таке математика, як вона функціонує, що вона робить для світу і що вона може запропонувати сама по собі. Ми сподіваємося побачити, що математика має зміст, який служить фізичному та соціальному вченому, філософу, логіку та художнику; зміст, який впливає на доктрини державного діяча і богослова; зміст, який задовольняє цікавість людини, яка досліджує небеса, і людини, яка розмірковує над солодкістю музичних звуків; і зміст, який безперечно, якщо іноді й непомітно, сформував хід новітньої історії. Коротко кажучи, ми спробуємо побачити, що математика є невід'ємною частиною сучасного світу, однією з найсильніших сил, що формують її думки і дії, і сукупністю живих, хоча і нерозривно пов'язаних з, залежних і, в свою чергу, цінних для всіх інших галузей нашої культури. Можливо, ми також побачимо, як, поглинаючи і впливаючи на всі думки, вона задала інтелектуальний характер нашого часу.

#### ВПРАВИ

1. Вовк, коза і капуста повинні веслуватися через річку в човні, що тримає тільки один з цих трьох предметів, крім весляра. Як він повинен нести їх поперек, щоб коза не з'їла капусту або вовк зжерла козу?

2. Ще один сивий тизер такий: Чоловік йде до ванни з водою з двома банками, одна з яких тримає 3 пт, а інша 5 пт. Як він може повернути рівно 4 пт?

3. Двоє чоловіків і дві дружини повинні перетнути річку на човні, який може вмістити тільки двох людей. Як вони можуть перетнутися так, щоб жодна жінка не була в компанії чоловіка, якщо її чоловік також не присутній?

##### Рекомендована література

РАССЕЛ, БЕРТРАН: «Вивчення математики», есе в збірці під назвою « Містика і логіка», Лонгманс, Грін і Ко, Нью-Йорк, 1925.

УАЙТХЕД, АЛЬФРЕД НОРТ: "Математична навчальна програма", есе в збірці під назвою " Цілі освіти", Нова американська бібліотека, Нью-Йорк, 1949.

УАЙТХЕД, АЛЬФРЕД НОРТ: Наука і сучасний світ, Chaps. 2 і 3, Cambridge University Press, Кембридж, 1926.

## РОЗДІЛ 2

ІСТОРИЧНА СПРЯМОВАНІСТЬ

Освічений розум як би складається з усіх умів попередніх віків.

LE BOVIER DE FONTENELLE

2–1 ВСТУП

Нашою першою метою буде отримати деяку історичну перспективу на предмет математики. Хоча логічний розвиток математики помітно не відрізняється від історичного, проте існує багато особливостей математики, які виявляються проблиском її історії, а не вивченням понять, теорем і доказів. Таким чином, ми можемо дізнатися, що зараз включає в себе предмет, як виникли різні галузі і як характер математичного внеску, зробленого різними цивілізаціями, був обумовлений цими цивілізаціями. Це історичне дослідження також може допомогти нам отримати деяке попереднє розуміння природи, обсягу та використання математики. Нарешті, попередній перегляд може допомогти нам зорієнтуватися. При вивченні великого предмета завжди стикаєшся з небезпекою загубитися в деталях. Особливо це стосується математики, де часто доводиться витрачати години і навіть дні на те, щоб зрозуміти якісь нові поняття або докази.

2–2 МАТЕМАТИКА В РАННІХ ЦИВІЛІЗАЦІЯХ

За винятком, можливо, астрономії, математика є найдавнішою і найбільш безперервно переслідуваною галуззю людської думки. Більше того, на відміну від науки, філософії та соціальної думки, дуже мало математики, яка коли-небудь була створена, було відкинуто. Математика також є кумулятивним розвитком, тобто нові творіння логічно будуються на старих, так що зазвичай потрібно розуміти старі результати, щоб освоїти новіші. Ці факти рекомендують нам повернутися до самих витоків математики.

Коли ми розглядаємо ранні цивілізації, відразу вимальовується один чудовий факт. Хоча існували сотні цивілізацій, багато з яких мали велике мистецтво, літературу, філософію, релігію та соціальні інститути, дуже мало хто володів математикою, про яку варто було б говорити. Більшість з цих цивілізацій навряд чи пройшли стадію здатності рахувати до п'яти або десяти.

У деяких з цих ранніх цивілізацій було зроблено кілька кроків в математиці. У доісторичні часи, що означає приблизно до 4000 р. до н.е.С., кілька цивілізацій принаймні навчилися думати про числа як про абстрактні поняття. Тобто вони визнали, що три вівці і три стріли мають щось спільне, величину під назвою три, про яку можна думати незалежно від будь-яких фізичних об'єктів. Кожен з нас у своєму навчанні проходить через цей самий процес відокремлення чисел від фізичних об'єктів. Оцінка «числа» як абстрактної ідеї є великим і, можливо, першим кроком у заснуванні математики.

Ще одним кроком стало введення арифметичних дій. Цілком ідея полягає в тому, щоб додати числа, що представляють дві колекції об'єктів, щоб отримати загальну суму, а не рахувати об'єкти в об'єднаних колекціях. Подібні зауваження стосуються віднімання, множення та ділення. Ранні методи проведення цих операцій були грубими і складними в порівнянні з нашими, але ідеї та застосування були.

Лише кілька стародавніх цивілізацій, Єгипет, Вавилон, Індія та Китай, володіли тим, що можна назвати зачатками математики. Історія математики, та й взагалі історія західної цивілізації, починається з того, що сталося в перших двох з цих цивілізацій. Роль Індії проявиться пізніше, тоді як роль Китаю можна ігнорувати, оскільки вона не була великою і до того ж не мала впливу на подальший розвиток математики.

Наші знання про єгипетську та вавилонську цивілізації сягають приблизно 4000 р. до н.е.З. Єгиптяни займали приблизно той же регіон, який зараз становить сучасний Єгипет, і мали безперервну, стабільну цивілізацію з давніх часів приблизно до 300 року до нашої ери.З. Термін «вавилонський» включає в себе послідовність цивілізацій, які займали регіон сучасного Іраку. Обидва ці народи володіли цілими числами і дробами, неабиякою кількістю арифметики, деякою алгеброю і рядом простих правил знаходження площ і обсягів геометричних фігур. Ці правила були лише випадковим накопиченням досвіду, подібно до того, як люди через досвід дізнавалися, які продукти їсти. Багато правил насправді були неправильними, але досить хорошими для простих програм, зроблених тоді. Наприклад, єгипетське правило знаходження площі кола дорівнює використанню 3,16 квадрата радіуса; Тобто їх значення π дорівнювало 3, 16. Це значення, хоча і не точне, було навіть кращим, ніж кілька значень, які використовували вавилоняни, одне з яких було 3, значення, знайдене в Біблії.

Що ці ранні цивілізації зробили зі своєю математикою? Якщо ми можемо судити з проблем, знайдених у давньоєгипетських папірусах та глиняних табличках вавилонян, обидві цивілізації використовували арифметику та алгебру в основному в торгівлі та державному управлінні, щоб обчислити прості та складні відсотки за позиками та іпотекою, розподілити прибуток бізнесу між власниками, купувати та продавати товари, встановлювати податки, і підрахувати, скільки бушелів зерна вийде кількість пива з певним вмістом алкоголю. Геометричні правила застосовувалися для розрахунку площ полів, передбачуваної врожайності ділянок землі, обсягів споруд, кількості цегли або каменів, необхідних для зведення храму або піраміди. Давньогрецький історик Геродот говорить, що, оскільки щорічний розлив Нілу стер межі земель землеробів, геометрія була необхідна для перевизначення кордонів. Насправді Геродот говорить про геометрію як про дар Нілу. Ця частина історії є частковою правдою. Перевизначення кордонів, безсумнівно, було застосуванням, але геометрія існувала в Єгипті задовго до дати 1400 р. До н.е.З. згадується Геродотом за його походження. Геродот був би точніше сказати, що Єгипет є даром Нілу, бо це правда сьогодні, як і тоді, що єдина родюча земля в Єгипті - це земля вздовж Нілу; І це тому, що річка відкладає хороший грунт на суші в міру її розливу.

Застосування геометрії, просте і грубе, зіграло велику роль в Єгипті і Вавилонії. Обидва народи були великими будівельниками. Єгипетські храми, такі як у Карнаку та Луксорі, а також піраміди все ще здаються чудовими інженерними досягненнями навіть у цю епоху хмарочосів. Вавилонські храми, звані зіккуратами, також були чудовими пірамідальними спорудами. Вавилоняни були, крім того, висококваліфікованими іригаційними інженерами, які побудували систему каналів для живлення своїх гарячих посушливих земель з річок Тигр і Євфрат.

Можливо, необхідно слово застереження щодо пірамід. Оскільки це вражаючі споруди, деякі письменники про єгипетську цивілізацію прийшли до висновку, що математика, яка використовується при будівництві пірамід, також повинна була вражати. Ці письменники вказують на те, що горизонтальні розміри будь-якої однієї піраміди точно однакової довжини, похилі сторони все роблять однаковий кут з землею, а прямі кути прямі. Однак для отримання таких результатів була потрібна не математика, а уважність і терпіння. Червонодеревник не обов'язково повинен бути математиком.

Математика в Єгипті і Вавилонії також застосовувалася до астрономії. Звичайно, астрономія проводилася в цих древніх цивілізаціях для календарного розрахунку і, в якійсь мірі, для навігації. Рух небесних світил дає нам наш фундаментальний стандарт часу, а їх положення в даний момент часу дозволяє кораблям визначати своє місцезнаходження, а каравани орієнтуватися в пустелях. Календарний розрахунок є не тільки загальною щоденною та комерційною потребою, але він фіксує релігійні свята та час посадки. У Єгипті також потрібно було передбачити розлив Нілу, щоб фермери могли заздалегідь вивезти майно і худобу.

Варто відзначити, що, спостерігаючи за рухом сонця, єгиптянам вдалося встановити, що рік містить 365 днів. Існує припущення, що жерці Єгипту знали, що 365образ рік був більш точною цифрою, але тримали знання в таємниці. Єгипетський календар був перейнятий набагато пізніше римлянами, а потім перейшов в Європу. Вавилоняни, навпаки, розробили місячний календар. Оскільки тривалість місяця, виміряного від молодика до молодика, варіюється від 29 до 30 днів, дванадцятимісячний рік, прийнятий вавилонянами, не збігався з роком пір року. Отже, вавилоняни додавали додаткові місяці, до семи, у кожному 19-річному циклі. Цю схему також взяли на озброєння євреї.

Астрономія служила не тільки тільки тільки описаним цілям, але з давніх часів і до недавнього часу вона служила ще й астрології. У стародавній Вавилонії і Єгипті була поширена віра в те, що Місяць, планети і зірки безпосередньо впливають і навіть контролюють справи держави. Це вчення поступово розширювалося і пізніше включало віру в те, що здоров'я і благополуччя людини також підпорядковуються волі небесних світил. Звідси здавалося розумним, що, вивчаючи рухи і взаємне розташування цих тіл, людина може визначити їх вплив і навіть передбачити своє майбутнє.

Якщо порівняти єгипетські та вавилонські досягнення в математиці з досягненнями попередніх і сучасних цивілізацій, то справді можна знайти підстави похвалити їхні досягнення. Але судячи з інших стандартів, єгипетський і вавилонський внесок в математику був майже незначним, хоча ці ж цивілізації досягли відносно високих рівнів в релігії, мистецтві, архітектурі, металургії, хімії та астрономії. У порівнянні з досягненнями своїх безпосередніх наступників, греків, математика єгиптян і вавилонян - це повзання дітей, які тільки вчаться писати, на відміну від великої літератури. Вони ледве визнавали математику окремим предметом. Це був інструмент у сільському господарстві, торгівлі та машинобудуванні, не важливіший за інші інструменти, які вони використовували для будівництва пірамід та зиг-куратів. Протягом 4000 років майже не було досягнуто прогресу в цій темі. Більш того, сама суть математики, а саме міркування про встановлення обґрунтованості методів і результатів, навіть не передбачалася. Досвід рекомендував свої процедури і правила, і цією підтримкою вони були задоволені. Єгипетська та вавилонська математика найкраще описується як емпірична і навряд чи заслуговує на апеляційну математику з огляду на те, що, починаючи з грецьких часів, ми вважаємо головними особливостями предмета. Деяка плоть і кістки конкретної математики були там, але духу математики не вистачало.

Відсутність інтересу до теоретичних або систематичних знань очевидно у всій діяльності цих двох цивілізацій. Єгиптяни і вавилоняни, мабуть, відзначали шляхи зірок, планет і місяця протягом тисячоліть. Їх календарі, а також збережені таблиці свідчать про обсяг і точність цих спостережень. Але жоден єгиптянин або вавилонянин, наскільки нам відомо, не прагнув охопити всі ці спостереження в одному великому плані або теорії небесних рухів. Також не можна знайти жодної іншої наукової теорії чи пов'язаної сукупності знань.

2–3 КЛАСИЧНИЙ ГРЕЦЬКИЙ ПЕРІОД

Ми досі бачили, що математика, започаткована ще в доісторичні часи, тисячоліттями боролася за існування. Він нарешті отримав міцний контроль над життям у надзвичайно сприятливій атмосфері Греції. Ця земля була захоплена близько 1000 р. до н.е.З. людьми, походження яких невідоме. Приблизно на 600 Б.З. ці люди займали не тільки власне Грецію, але й багато міст Малої Азії на узбережжі Середземного моря, острови, такі як Крит, Родос і Самос, а також міста на півдні Італії та Сицилії. Хоча всі ці райони розводили знаменитих людей, головний культурний центр в класичний період, який тривав приблизно з 600 року до н.е.З. до 300 Б.C., був Афінами.

Грецька культура не була повністю корінною. Самі греки визнають свою заборгованість перед вавилонянами і особливо перед єгиптянами. Багато греків подорожували по Єгипту і по Малій Азії. Деякі їздили туди вчитися. Проте те, що створили греки, так само відрізняється від того, що вони перейняли від єгиптян і вавилонян, як золото відрізняється від олова. Платон був занадто скромним у своєму описі грецького внеску, коли сказав: «Все, що ми, греки, отримуємо, ми вдосконалюємося і вдосконалюємося». Греки не тільки робили готову продукцію з сировини, імпортованого з Єгипту і Вавилонії, але і створювали абсолютно нові галузі культури. Філософія, чисті та прикладні науки, політична думка та інститути, історичні твори, майже всі наші літературні форми (крім художньої прози) та нові ідеали, такі як свобода особистості, є повністю грецьким внеском.

Найвищий внесок греків полягав у тому, щоб привернути увагу, використовувати і підкреслювати силу людського розуму. Це визнання сили міркувань є найбільшим єдиним відкриттям, зробленим людиною. Більше того, греки визнавали, що розум є особливою здатністю, якою володіють люди. Аристотель говорить: «Тепер для будь-якої природи характерно те, що найкраще для неї і приносить найбільшу радість. Таким для людини є життя згідно з розумом, оскільки саме воно робить її людиною».

Саме шляхом застосування міркувань до математики греки повністю змінили природу предмета. Насправді, математика, як ми розуміємо цей термін сьогодні, є виключно грецьким даром, хоча в цьому випадку нам не слід прислухатися до настанови Вергілія боятися таких благодіянь. Але як греки планували використовувати розум в математиці? У той час як єгиптяни і вавилоняни задовольнялися тим, що підбирали уривки корисної інформації шляхом досвіду або проб і помилок, греки відмовилися від емпіризму і зробили систематичну, раціональну атаку на весь предмет. Перш за все, греки ясно бачили, що числа і геометричні форми зустрічаються всюди на небі і на землі. Тому вони вирішили зосередитися на цих важливих концепціях. Більше того, вони чітко заявили про свій намір розглядати загальні абстрактні поняття, а не конкретні фізичні реалізації. Таким чином, вони розглядали б ідеальне коло, а не межу поля або форму колеса. Потім вони помітили, що певні факти про ці поняття є як очевидними, так і основними. Було очевидно, що рівні числа, додані до рівних чисел або відняті від них, дають рівні числа. Так само очевидно, що два прямі кути обов'язково рівні і що коло можна намалювати, коли задано центр і радіус. Тому вони вибрали деякі з цих очевидних фактів як відправну точку і назвали їх аксіомами. Наступна їхня ідея полягала в тому, щоб застосовувати міркування з цими фактами як передумовами і використовувати тільки найнадійніші методи міркування, якими володіє людина. Якби міркування були успішними, це дало б нові знання. Крім того, оскільки вони міркували про загальні поняття, їх висновки застосовувалися б до всіх об'єктів, з яких поняття були репрезентативними. Таким чином, якби вони могли довести, що площа кола π разів перевищує квадрат радіуса, цей факт застосовувався б до площі круглого поля, площі підлоги круглого храму та поперечного перерізу круглого стовбура дерева. Такі міркування про загальні поняття могли не тільки дати знання сотень фізичних ситуацій в одному доказі, але завжди існувала ймовірність того, що міркування дадуть знання, які досвід ніколи не може припустити. Всі ці переваги греки розраховували вивести з міркувань про загальні поняття на основі очевидних достовірних фактів. Акуратний план, дійсно!

Можливо, вже зрозуміло, що греки мали менталітет, абсолютно відмінний від менталітету єгиптян і вавилонян. Вони розкривають це і в планах, які вони мали щодо використання математики. Застосування арифметики та алгебри для обчислення відсотків, податків або комерційних операцій, а геометрії для обчислення обсягів зерносховищ було так само далеке від їхніх розумів, як і найвіддаленіша зірка. Власне кажучи, їх думки були про далекі зірки. Греки вважали математику цінною у багатьох відношеннях, як ми дізнаємося пізніше, але вони бачили її головну цінність у допомозі, яку вона надавала вивченню природи; І з усіх явищ природи небесні світила приваблювали їх найбільше. Таким чином, хоча греки також вивчали світло, звук і рух тіл на Землі, астрономія була їх головним науковим інтересом.

Тільки чого прагнули греки в зондуванні природи? Вони не прагнули ні матеріальної вигоди, ні влади над природою; Вони прагнули просто задовольнити свій розум. Оскільки їм подобалися міркування і оскільки природа представляла найбільш значний виклик їхньому розумінню, греки взялися за чисто інтелектуальне вивчення природи. Таким чином, греки є основоположниками науки в істинному сенсі.

Грецька концепція природи, можливо, була навіть сміливішою, ніж їхня концепція математики. У той час як ранні і пізніші цивілізації розглядали природу як примхливу, довільну і жахливу, і піддавалися вірі в те, що магія і ритуали умилостивлять таємничі і страшні сили, греки наважувалися дивитися природі в обличчя. Вони наважилися стверджувати, що природа була раціонально і дійсно математично розроблена, і що розум людини, головним чином за допомогою математики, зрозуміє цей задум. Грецький розум відкидав традиційні вчення, надприродні причини, забобони, догми, авторитети та інші подібні трамваї на думки і брався проливати світло розуму на процеси природи. Прагнучи вигнати таємницю і уявне свавілля природи і скасувавши віру в страшні сили, греки були першопрохідцями.

З причин, які стануть зрозумілішими в наступному розділі, греки віддавали перевагу геометрії. До 300 Б.C., Фалес, Піфагор і його послідовники, учні Платона, особливо Евдокс, і сотні інших відомих людей створили величезну логічну структуру, більшу частину якої Евклід втілив у своїх «Стихіях». Це, звичайно, геометрія, яку ми досі вивчаємо в середній школі. Хоча вони зробили певний внесок у вивчення властивостей чисел і в розв'язання рівнянь, майже вся їхня робота була в геометричній формі, і тому не було ніякого поліпшення в порівнянні з єгиптянами і вавилонянами в поданні і обчисленні чисел або в символіці і прийомах алгебри. Для цих внесків світу довелося чекати ще багато століть. Але величезний розвиток геометрії справив величезний вплив на наступні цивілізації і надихнув на математичну діяльність цивілізацій, які інакше ніколи б не набули навіть самої концепції математики.

Крім того, грецькі досягнення в математиці мали більш широке значення надання перших вражаючих доказів сили людського розуму для виведення нових істин. У кожній культурі, на яку вплинули греки, цей приклад надихав людей застосовувати розум до філософії, економіки, політичної теорії, мистецтва та релігії. Навіть сьогодні Евклід є яскравим прикладом сили і досягнень розуму. Сотні поколінь з часів Евкліда навчилися з його геометрії, що таке міркування і чого воно може досягти. Сучасна людина, так само як і стародавні греки, дізналися з евклідового документа, як слід протікати точним міркуванням, як набути в ньому можливості і як відрізнити правильні міркування від помилкових. Хоча багато людей знецінюють цю цінність математики, цікаво, однак, що коли ці люди прагнуть запропонувати чудовий приклад міркувань, вони неминуче звертаються до математики.

Це коротке обговорення евклідової геометрії може показати, що предмет далеко не є пережитком мертвого минулого. Вона залишається важливою як сходинка власне математики і як парадигма міркувань. Своїм даром розуму і своїм явним прикладом сили розуму греки заснували західну цивілізацію.

2–4 ОЛЕКСАНДРІЙСЬКО-ГРЕЦЬКИЙ ПЕРІОД

Інтелектуальне життя Греції значно змінилося, коли Олександр Македонський завоював Грецію, Єгипет і Близький Схід. Олександр вирішив побудувати нову столицю для своєї величезної імперії і заснував в Єгипті місто, названий його ім'ям. Центром нового грецького світу стала Олександрія замість Афін. Крім того, Олександр докладав навмисних зусиль для злиття грецької та близькосхідної культур. Отже, цивілізація, зосереджена в Олександрії, хоча і переважно грецька, перебувала під сильним впливом єгипетського та вавилонського внесків. Ця олександрійська грецька цивілізація проіснувала приблизно з 300 р. до н.е.З. до 600 А.Д.

Змішання теоретичних інтересів греків і практичного світогляду вавилонян і єгиптян яскраво простежується в математичних і наукових роботах олександрійських греків. Чисто геометричні дослідження класичних греків були продовжені, і два найвідоміших грецьких математики, Аполлоній і Архімед, продовжили свої дослідження в олександрійський період. Насправді Евклід також жив в Олександрії, але його праці відображають досягнення класичного періоду. Для практичних застосувань, які зазвичай вимагають кількісних результатів, олександрійці відродили грубу арифметику та алгебру Єгипту та Вавилонії та використовували ці емпірично обґрунтовані інструменти та процедури, а також результати, отримані в результаті точних геометричних досліджень. Був певний прогрес в алгебрі, але те, що було нещодавно створено такими людьми, як Ніхомах і Діофант, все ще не відповідало навіть елементарним методам, які ми вивчаємо в середній школі.

Спроба бути кількісною в поєднанні з класичною грецькою любов'ю до математичного вивчення природи стимулювала двох найвідоміших астрономів усіх часів, Гіппарха і Птолемея, обчислити розміри і відстані небесних тіл і побудувати звукову і, на той час, точну астрономічну теорію, яка все ще відома як теорія Птолемея. Гіппарх і Птолемей також створили головний інструмент, необхідний для цієї мети, математичний предмет, відомий як тригонометрія.

Протягом століть, в яких процвітала олександрійська цивілізація, римляни зміцніли, і до кінця третього століття до нашої ери.З. Вони були світовою державою. Завоювавши Італію, римляни завоювали материкову Грецію і ряд грецьких міст, розкиданих по території Середземномор'я. Серед таких був знаменитий місто Сіракузи на Сицилії, де Архімед провів більшу частину свого життя, і де був убитий у віці 75 років римським солдатом. Згідно з розповіддю відомого історика Плутарха, воїн кричав Архімеду здатися, але останній був настільки поглинений вивченням математичної задачі, що не почув наказу, після чого солдат убив його.

Контраст між грецькою і римською культурами разючий. Римляни також заповіли дари західній цивілізації, але в області математики і науки їх вплив був скоріше негативним, ніж позитивним. Римляни були практичним народом і навіть хвалилися своєю практичністю. Вони прагнули багатства і світової влади і були готові зайнятися великими інженерними підприємствами, такими як будівництво доріг і віадуків, які могли б допомогти їм розширити, контролювати і управляти своєю імперією, але вони не витрачали ні часу, ні зусиль на теоретичні дослідження, які могли б сприяти цій діяльності. Як зауважив великий філософ Альфред Норт Уайтхед: «Жоден римлянин ніколи не втрачав життя, тому що він був поглинений спогляданням математичної діаграми».

Як опосередковано, так і прямо, римляни призвели до знищення грецької цивілізації в Олександрії, безпосередньо завоювавши Єгипет і опосередковано, прагнучи придушити християнство. Прихильників цього нового релігійного руху, хоча і жорстоко переслідували римляни, стало більше, а Римська імперія ослабла. У 313 р.Д. Рим легалізував християнство і за імператора Феодосія (379-395) прийняв його як офіційну релігію імперії. Але ще до цього часу, і, звичайно, після нього, християни почали нападати на культури і цивілізації, які їм протистояли. Грабежами і спаленням книг вони знищували все, до чого могли дістатися стародавньої науки. Природно, грецька культура постраждала, і багато творів, знищених під час цих голокостів, тепер втрачені для нас назавжди.

Остаточне знищення Олександрії в 640 році н.е.Д. був вчинок арабів. Книги греків були закриті, щоб ніколи більше не відкриватися в цьому регіоні.

2–5 ІНДУСИ ТА АРАБИ

Араби, які раптово з'явилися на сцені історії в ролі руйнівників, були кочовим народом. Вони об'єдналися під керівництвом пророка Мухаммеда і почали спробу навернути світ в магометанство, використовуючи меч як свій найрішучіший аргумент. Вони завоювали всі землі навколо Середземного моря. На Близькому Сході вони захопили Персію і проникли аж до Індії. На півдні Європи вони окупували Іспанію, південь Франції, де їх зупинив Карл Мартел, південь Італії та Сицилію. Тільки Візантійська або Східна Римська імперія не була підкорена і залишалася ізольованим центром грецького і римського навчання. У досить напрочуд швидкий час, як свідчить історія народів, араби оселилися і побудували цивілізацію і культуру, які підтримували високий рівень приблизно з 800 по 1200 рік нашої ери.Д. Їх головними центрами були Багдад на території сучасного Іраку і Кордова в Іспанії. Зрозумівши, що греки створили чудові творіння в багатьох областях, араби приступили до збору і вивчення того, що вони ще можуть знайти на землях, які вони контролювали. Вони переклали на арабську мову твори Аристотеля, Евкліда, Аполлонія, Архімеда, Птолемея. Насправді головна праця Птолемея, назва якої грецькою означала «Математична колекція», була названа арабами Альмагестом (Найбільшим твором) і досі відома під цим ім'ям. До речі, іншими арабськими словами, які зараз є поширеними математичними термінами, є алгебра, взята з назви книги, написаної Аль-Ховарізмі, арабським математиком дев'ятого століття, і алгоритм, який тепер означає процес обчислення, який є спотворенням імені людини.

Хоча вони виявляли жвавий інтерес до математики, оптики, астрономії та медицини, араби мало що зробили оригінальним. Цікаво також, що, хоча вони мали принаймні деякі грецькі праці і, отже, могли бачити, що означає математика, їх власний внесок, в основному в арифметику та алгебру, слідував емпіричному, конкретному підходу єгиптян і вавилонян. Вони могли, з одного боку, оцінити і критично переглянути точну, точну і абстрактну математику греків, а з іншого боку, запропонувати методи розв'язання рівнянь, які, хоча і працювали, не мали жодних підстав для їх підтримки. Протягом усіх століть, протягом яких грецькі твори перебували у своєму розпорядженні, араби мужньо чинили опір спокусам точних міркувань у своїх власних внесках.

Ми в боргу перед арабами не тільки за реанімацію грецьких творів, але й за те, що вони підхопили деякі прості, але корисні ідеї з Індії, свого сусіда на Сході. Індійці також створили елементарну математику, порівнянну за масштабами і духом з єгипетськими і вавилонськими розробками. Однак приблизно через 200 А.Д., математична діяльність в Індії стала більш помітною, ймовірно, в результаті контактів з олександрійською грецькою цивілізацією. Індуси зробили кілька власних внесків, таких як використання спеціальних числових символів від 1 до 9, введення 0 і використання позиційних позначень з основою ten, тобто наш сучасний метод запису чисел. Вони також створювали негативні числа. Ці ідеї були перейняті арабами і включені в свої математичні праці.

Через внутрішні чвари Арабська імперія розкололася на дві незалежні частини. Хрестові походи, розпочаті європейцями, і вторгнення, зроблені турками, ще більше послабили арабів, а їх імперія і культура розпалися.

2–6 РАННЯ І СЕРЕДНЬОВІЧНА ЄВРОПА

До теперішнього часу власне Європа не відігравала ніякої ролі в історії математики. Причина проста. Германські племена, які займали Центральну Європу, і галли Західної Європи були варварами. У первісних цивілізацій вони дійсно були примітивними. У них не було ні навчання, ні мистецтва, ні науки, ні навіть системи писемності.

Варвари поступово цивілізовані. У той час як римляни все ще успішно утримували регіони, які тепер називаються Францією, Англією, південною Німеччиною та Балканами, варвари контактували з римлянами і певною мірою перебували під їх впливом. Коли Римська імперія розпалася, Церква, вже будучи сильною організацією, взяла на себе завдання цивілізації і навернення варварів. Оскільки Церква не сприяла вивченню грецької мови і оскільки в усякому разі неписьменні європейці спочатку навчилися читати і писати, не дивно, що математика і природничі науки були практично невідомі в Європі приблизно до 1100 р. н.е.Д.

2–7 ВІДРОДЖЕННЯ

Що стосується історії математики, то араби служили агентами долі. Торгівля з арабами і такі вторгнення на арабські землі, як хрестові походи, познайомили європейців, які досі володіли лише фрагментами грецьких творів, з величезними запасами грецької науки, якими володіли араби. Ідеї в цих роботах схвилювали європейців, і вчені взялися за їх придбання і переклад на латинську мову. Через чергову випадковість історії інша група грецьких творів потрапила до Європи. Ми вже відзначали, що Східна Римська або Візантійська імперія пережила германські та арабські звеличення. Але в п'ятнадцятому столітті турки захопили Східну Римську імперію, а грецькі вчені, що перевозили дорогоцінні рукописи, втекли з регіону і вирушили в Європу.

Ми залишимо для наступного розділу більш повну розповідь про те, як європейський світ був викликаний відродженням нових і вагомих грецьких ідей, і про виклик, який ці ідеї кинули європейським віруванням і способу життя.[\*](#pg21fn1) Від греків європейці придбали арифметику, грубу алгебру, величезний розвиток геометрії Евкліда, тригонометрію Гіп-Парха і Птолемея. Звичайно, грецька наука і філософія також стали відомі в Європі.

Перші великі європейські розробки в галузі математики відбулися в творчості художників. Перейнявшись грецькими доктринами про те, що людина повинна вивчати себе і реальний світ, художники почали малювати дійсність такою, якою вони її насправді сприймали, замість того, щоб інтерпретувати релігійні теми в символічних стилях. Вони застосували евклідову геометрію, щоб створити нову систему перспективи, яка дозволила їм малювати реалістично. Зокрема, художники створили новий стиль живопису, який дозволив їм представити на полотні сцени, що справляють таке ж враження на око, як і самі фактичні сцени. З робіт художників математики виводили ідеї і завдання, які привели до нового розділу математики - проективної геометрії.

Стимульований грецькими астрономічними ідеями, забезпечений даними та астрономічною теорією Гіппарха та Птолемея, і занурений у грецьке вчення про те, що світ математично спроектований, Микола Коперник прагнув показати, що Бог зробив роботу краще, ніж описали Гіппарх і Птолемей. Результатом роздумів Коперника стала нова система астрономії, в якій Сонце було нерухомим, а планети оберталися навколо Сонця. Ця геліоцентрична теорія була значно вдосконалена Кеплером. Її вплив на релігію, філософію, науку і на оцінку людиною власної важливості був глибоким. Геліоцентрична теорія також піднімала науково-математичні проблеми, які були прямим стимулом для нових математичних розробок.

Наскільки велику математичну активність могло стимулювати відродження грецьких творів, визначити неможливо, оскільки одночасно з перекладом і поглинанням цих творів ряд інших революційних подій змінили соціальне, економічне, релігійне та інтелектуальне життя Європи. Впровадження пороху супроводжувалося використанням мушкетів, а пізніше і гармат. Ці винаходи зробили революцію в методах ведення війни і надали новому соціальному класу вільних простих людей важливу роль у цій сфері. Компас став відомий європейцям і зробив можливою далеку навігацію, яку купці спонсорували з метою пошуку нових джерел сировини і кращих торгових шляхів. Одним з результатів стало відкриття Америки і, як наслідок, приплив нових ідей в Європу. Винахід друкарства і паперу з ганчір'я дозволило книгам у великих кількостях і за дешевими цінами, так що навчання поширилося набагато більше, ніж будь-коли в будь-яких попередніх цивілізаціях. Протестантська революція викликала дебати і сумніви щодо доктрин, які не заперечувалися протягом 1500 років. Зростання купецького класу і вільних людей, зайнятих працею від свого імені, стимулювало інтерес до матеріалів, методів виробництва і нових товарів. Всі ці потреби і впливи кинули виклик європейцям побудувати нову культуру.

2–8 РОЗВИТОК З 1550 ПО 1800 РІК

Оскільки багато проблем, викликаних рухом гарматних ядер, навігація і промисловість вимагали кількісних знань, арифметика і алгебра стали центрами уваги. За цим послідувало значне поліпшення в цих математичних областях. Це період, коли алгебра була побудована як галузь математики і в якому була створена більша частина алгебри, яку ми вивчаємо в середній школі. Майже всі великі математики шістнадцятого і сімнадцятого століть, Кардан, Тарталья, Вієта, Декарт, Ферма і Ньютон, люди, з якими ми познайомимося пізніше, зробили свій внесок у цю тему. Зокрема, використання букв для представлення класу чисел, пристрій, який надає алгебрі її загальність і силу, було введено Вієтою. У цей же період були створені логарифми для полегшення розрахунків астрономів. Історія арифметики і алгебри ілюструє одну з яскравих і цікавих особливостей історії математики. Ідеї, які здаються надзвичайно простими після пояснення, створювалися тисячі років.

Наступний розвиток послідовності, координатної геометрії, прийшов від двох чоловіків, обидва зацікавлені в методі. Одним з них був Рене Декарт. Декарт, мабуть, навіть більш відомий як філософ, ніж як математик, хоча він був одним з основних авторів нашого предмета. В юності Декарт вже був стурбований інтелектуальними потрясіннями свого віку. Він не знаходив впевненості в жодному з знань, яким його навчали, і тому роками зосереджувався на пошуку методу, за допомогою якого людина може прийти до істин. Він знайшов ключ до цього методу в математиці, і разом з ним побудував першу велику сучасну філософську систему. Оскільки наукові проблеми його часу включали роботу з кривими, шляхами кораблів у морі, планет, об'єктів, що рухаються поблизу Землі, світла та снарядів, Декарт шукав кращий метод доведення теорем про криві. Відповідь він знайшов у використанні алгебри. Інтерес П'єра де Ферма до методу обмежувався власне математикою, але він також оцінив необхідність більш ефективних способів роботи з кривими, а також прийшов до ідеї застосування алгебри. У цьому розвитку геометрії координат ми маємо один з чудових прикладів того, як час впливає на напрямок людських думок.

Ми вже відзначали, що в Європі розвивається нове суспільство. Серед його особливостей були розширена торгівля, обробна промисловість, гірничодобувна промисловість, велике сільське господарство і новий соціальний клас — вільні люди, які працювали як робітники або як незалежні ремісники. Ця діяльність та інтереси створили проблеми матеріалів, способів виробництва, якості продукту та використання пристроїв для заміни або підвищення ефективності робочої сили. Залучені люди, як і художники, дізналися про грецьку математику і науку і відчули, що це може бути корисно. І тому вони також прагнули використати ці знання від свого імені. Звідси виник новий мотив для вивчення математики і природничих наук. У той час як греки задовольнялися вивченням природи лише для того, щоб задовольнити власну цікавість і організувати свої висновки за зразками, приємними для розуму, нова мета, фактично проголошена Декартом і Френсісом Беконом, полягала в тому, щоб змусити природу служити людині. Тому математики і вчені серйозно звернулися до розширеної програми, в якій слід було шукати як розуміння, так і оволодіння природою.

Однак Бекон попереджав, що природою можна наказати лише тоді, коли людина навчиться їй коритися. Треба мати факти природи, на яких ґрунтуються міркування про природу. Тому математики і вчені прагнули отримати факти з досвіду художників, техніків, ремісників та інженерів. Союз математики і досвіду поступово трансформувався в союз математики і експериментів, поступово розвивався новий метод пошуку істин природи, вперше ясно сприйнятий і сформульований Галілео Галілеєм (1564-1642) і Ньютоном. План, можливо, надмірно просто сформульований, полягав у тому, що досвід і експеримент повинні були забезпечити основні математичні принципи, а математика повинна була застосовуватися до цих принципів для виведення нових істин, подібно до того, як нові істини виводяться з аксіом геометрії.

Найактуальнішою науковою проблемою сімнадцятого століття стало вивчення руху. З практичної сторони першочерговими інтересами були дослідження руху снарядів, руху Місяця і планет для полегшення навігації, а також руху світла для поліпшення конструкції нещодавно виявлених телескопів і мікроскопів. З теоретичної сторони, нова геліоцентрична астрономія скасувала старі, арістотелівські закони руху і закликала до абсолютно нових принципів. Одна справа пояснити, чому куля впала на землю, виходячи з припущення, що Земля нерухома і є центром Всесвіту, а інша - пояснити це явище в світлі того, що Земля обертається і обертається навколо Сонця. Нова наука про рух була створена Галілеєм і Ньютоном, і в процесі цього до математики були додані дві абсолютно нові розробки. Першим з них було поняття функції, зв'язок між змінними, найкраще виражена для більшості цілей у вигляді формули. Другим, який спирається на поняття функції, але являє собою найбільший прогрес у методі та змісті з часів Евкліда, було числення. Предмет математики і сила математики розширилися настільки, що в кінці сімнадцятого століття Лейбніц міг сказати:

Беручи математику від початку світу до часу, коли жив Ньютон, те, що він зробив, було набагато кращою половиною.

За допомогою обчислення Ньютон зміг організувати всі дані про земний і небесний рух в одну систему математичної механіки, яка охоплювала рух кулі, що падає на Землю, і рух планет і зірок. Це велике творіння створило універсальні закони, які не тільки об'єднали небо і землю, але й відкрили задум у Всесвіті, набагато більш вражаючий, ніж будь-коли уявляла людина. План Галілея і Ньютона щодо застосування математики до здорових фізичних принципів не тільки досяг успіху в одній важливій області, але й дав обіцянку, у швидко прискорюваному науковому русі, охопити всі інші фізичні явища.

З історії ми дізнаємося, що кінець сімнадцятого століття і вісімнадцяте століття ознаменувалися новим інтелектуальним ставленням, коротко описаним як Епоха розуму. Нам рідко кажуть, що цей вік був натхненний успіхами, яких досягла математика у поєднанні з наукою в організації людських знань. Сповнені переконання, що розум, уособлений математикою, не тільки завоює фізичний світ, але й зможе вирішити всі проблеми людини і, отже, повинен бути використаний у кожному інтелектуальному та художньому підприємстві, великі уми епохи здійснили радикальну реорганізацію філософії, релігії, етики, літератури та естетики. Початки нових наук, таких як психологія, економіка та політика, були зроблені під час цих раціональних досліджень. Наші основні інтелектуальні доктрини і світогляд були сформовані тоді, і ми все ще живемо в тіні Епохи Розуму.

Поки ці основні галузі нашої культури трансформувалися, вчені вісімнадцятого століття продовжували здобувати перемоги над природою. Обчислення незабаром було поширено на нову галузь математики, яка називається диференціальними рівняннями, і цей новий інструмент дозволив вченим вирішувати більш складні проблеми в астрономії, у вивченні дії сил, що викликають рухи, у звуці, особливо музичних звуках, у світлі, в теплі (особливо стосовно до розробки парового двигуна), і в міцності матеріалів, і в потоці рідин і газів. Інші галузі, які можна просто згадати, такі як нескінченні ряди, варіаційне числення та диференціальна геометрія, додали до ступеня та потужності математики. Великі імена Бернулліса, Ейлера, Лагранжа, Лапласа, д'Аламбера і Лежандра належать до цього періоду.

2–9 РОЗВИТОК З 1800 РОКУ ПО ТЕПЕРІШНІЙ ЧАС

Протягом дев'ятнадцятого століття розвиток математики відбувався все більшими темпами. Алгебра, геометрія та аналіз, останні, що включають ті предмети, які випливають з обчислення, набули нових галузей. Великі математики століття були настільки численні, що перераховувати їх недоцільно. Ми зустрінемо деяких з найбільших з них, Карла Фрідріха Гаусса та Бернхарда Рімана, у нашій роботі. Можна згадати також Анрі Пуанкаре і Давида Гільберта, чия творчість сягала ХХ століття.

Безсумнівно, основною причиною цієї експансії в математиці була експансія в науці. Прогрес, досягнутий у сімнадцятому і вісімнадцятому століттях, достатньо проілюстрував ефективність науки в проникненні в таємниці фізичного світу і в наданні людині контролю над природою, щоб викликати ще більш енергійне прагнення до науки в дев'ятнадцятому столітті. У цьому столітті наука стала набагато тісніше пов'язана з технікою і технологіями, ніж будь-коли раніше. Математики, тісно співпрацюючи з ученими, як і з сімнадцятого століття, зіткнулися з тисячами значних фізичних проблем і відповіли на ці виклики.

Мабуть, найважливішою науковою розробкою століття, характерною для стимуляції математичної діяльності, стало вивчення електрики і магнетизму. Ще в зародковому стані ця наука дала електродвигун, електричний генератор і телеграфію. Основні фізичні принципи незабаром були виражені математично, і стало можливим застосувати до цих принципів математичні методи, вивести нову інформацію так само, як це зробили Галілей і Ньютон з принципами руху. В ході таких математичних досліджень Джеймс Клерк Максвелл відкрив електромагнітні хвилі, найвідомішими представниками яких є радіохвилі. Таким чином, був відкритий новий світ явищ, об'єднаних в одну математичну систему. Незабаром з'явилося практичне застосування, з радіо і телебаченням як найбільш знайомими прикладами.

Чудові та революційні події іншого роду також відбулися в дев'ятнадцятому столітті, і це стало результатом повторного вивчення елементарної математики. Найглибшим за своїм інтелектуальним значенням було створення Гауссом неевклідової геометрії. Його відкриття мало як дражливі, так і тривожні наслідки: дражливі тим, що це нове поле містило абсолютно нові геометрії, засновані на аксіомах, які відрізняються від аксіом Евкліда, і тривожні тим, що воно зруйнувало найтвердіше переконання людини, а саме, що математика є сукупністю істин. Коли істина математики була підірвана, сфери філософії, науки і навіть деякі релігійні вірування задимлювалися. Наслідки були настільки шокуючими, що навіть математики відмовлялися серйозно ставитися до неевклідової геометрії, поки теорія відносності не змусила їх зіткнутися з усією значимістю творіння.

З причин, які, як ми віримо, стануть зрозумілішими далі, спустошення, спричинене неевклідовою геометрією, не зруйнувало математику, а звільнило її від рабства фізичного світу. Урок, отриманий з історії неевклідової геометрії, полягав у тому, що, хоча математики можуть почати з аксіом, які, здається, мають мало спільного зі спостережуваною поведінкою природи, аксіоми та теореми все ж можуть виявитися застосовними. Тому математики відчували себе вільніше, щоб керувати своєю уявою і розглядати абстрактні поняття, такі як комплексні числа, тензори, матриці та n-вимірні простори. За цим розвитком послідував ще більший прогрес в математиці і, що дивно, все більше використання математики в науках.

Ще до дев'ятнадцятого століття раціоналістичний дух, породжений успіхами математики у вивченні природи, проник до суспільствознавців. Вони почали наслідувати вчених-фізиків, тобто шукати основні істини у своїх галузях і намагатися реорганізувати своїх піддослідних за математичною схемою. Але ці спроби вивести закони людини і суспільства і звести науки біології, економіки і політики не увінчалися успіхом, хоча і мали деякі непрямі корисні ефекти.

Нездатність проникнути в соціальні та біологічні проблеми дедуктивним методом, тобто методом міркування з аксіом, змусила суспільствознавців перейняти і розвинути далі математичні теорії статистики і ймовірності, вже ініційовані математиками для різних цілей, починаючи від проблем азартних ігор і закінчуючи теорією теорії тепла і астрономії. Ці методи були надзвичайно успішними і дали певну наукову методологію для того, що було в основному спекулятивними областями.

Цей короткий нарис математики, який потрапить до нашої компетенції, може дати зрозуміти, що математика не є закритою книгою, написаною в грецькі часи. Це скоріше жива рослина, яка процвітала і знемагала з підйомом і падінням цивілізацій. Приблизно з 1600 року це постійний розвиток, який постійно ставав ширшим, багатшим і глибшим. Характер математики влучно, хоча й дещо витіювато, описав англійський математик XIX століття Джеймс Джозеф Сильвестр.

Математика — це не книга, замкнута в обкладинці і пов'язана між нахабними застібками, зміст яких їй потрібно лише терпіти, щоб розграбувати; це не шахта, скарби якої можуть зайняти багато часу, щоб зменшитися, але яка заповнює лише обмежену кількість жил і лод; це не грунт, родючість якого може бути вичерпана врожайністю послідовних врожаїв; це не материк і не океан, чия територія може бути нанесена на карту і визначена її контур; вона настільки ж безмежна, як і простір, який вона вважає занадто вузьким для своїх прагнень; його можливості так само безмежні, як світи, які вічно тісняться і розмножуються на погляді астронома; Вона не може бути обмежена у визначених межах або зведена до визначень постійної дійсності як свідомості, життя, яке, здається, дрімає в кожній монаді, в кожному атомі матерії, в кожному листку, бруньці та клітині і назавжди готове вирватися в нові форми рослинного і тваринного існування.

Наш нарис розвитку математики намагався вказати основні епохи та цивілізації, в яких цей предмет процвітав, різноманітність інтересів, які спонукали людей займатися математикою, і галузі математики, які були створені. Звичайно, ми маємо намір більш ретельно і повно дослідити, що це за творіння і які цінності вони надали людству. Тут можна зазначити один історичний факт. Математика як сукупність міркувань з аксіом походить від одного джерела, класичних греків. Всі інші цивілізації, які займалися або займаються математикою, придбали цю концепцію математики у греків. Арабська і західноєвропейська цивілізації були наступними цивілізаціями, які взяли верх і розширилися на грецькому фундаменті. Сьогодні також активні такі країни, як США, Росія, Китай, Індія та Японія. Хоча останні три з них мали певну рідну математику, вона була обмеженою та емпіричною, як у Вавилонії та Єгипті. Сучасна математична діяльність у цих п'яти країнах і скрізь, де вона зараз розвивається, була натхненна західноєвропейською думкою і фактично вивчена людьми, які навчалися в Європі і повернулися, щоб побудувати центри викладання у своїх країнах.

2–10 ЛЮДСЬКИЙ АСПЕКТ МАТЕМАТИКИ

Останній момент про математику неявний у тому, що ми сказали. Ми говорили про проблеми, які породили математику, про культури, які підкреслювали одні напрямки мислення на противагу іншим, і про галузі математики, ніби всі ці сили і діяльність були такими ж безособовими, як сила тяжіння. Але ідеї і мислення передають люди. Математика - це людське творіння. Хоча більшість греків вірили, що математика існує незалежно від людей, як здається планетам і горам, і що все, що люди роблять, це відкривають все більше і більше структури, сьогодні поширена думка, що математика є повністю людським продуктом. Концепції, аксіоми і встановлені теореми створені людьми в спробі людини зрозуміти своє оточення, дати гру своїм художнім інстинктам і зайнятися поглинанням інтелектуальної діяльності.

Життя і діяльність самих чоловіків також захоплююча. Хоча математики створюють формули, жодна формула не виробляє математиків. Вони прийшли з усіх верств суспільства. Особливий талант, якщо він є, який робить математиків, був виявлений у Казановас і аскетів, серед ділових людей і філософів, серед атеїстів і глибоко релігійних, серед пенсіонерів і мирських. Деякі, як Блез Паскаль і Гаусс, були скоростиглими; Евариста Галуа помер у 21 рік, а Нільс Хендрік Абель у 27. Інші, такі як Карл Вейерштрасс і Анрі Пуанкаре, дорослішали нормально і були продуктивними протягом усього життя. Багато хто був скромним; інші вкрай егоїстичні і марнославні поза терпимістю. Можна знайти негідників, таких як Кардан, і моделей прямоти. Дехто був щедрим у визнанні інших великих умів; Інші були ображені і заздрісні і навіть крали ідеї, щоб підвищити власну репутацію. Суперечок про пріоритетність відкриття предостатньо.

Сенс вивчення цих людських варіацій, крім задоволення нашого інстинкту підглядати за життям інших людей, полягає в тому, що він значною мірою пояснює, чому прогрес високораціонального предмета математики був дуже ірраціональним. Звичайно, основні історичні сили, які ми намалювали вище, обмежують дії і впливають на світогляд індивідів, але ми також знаходимо в історії математики всі примхи, які він навчився пов'язувати з людьми. Провідні математики не змогли розпізнати яскраві ідеї, запропоновані молодими чоловіками, і автори померли занедбаними. Великі і маленькі люди робили безуспішні спроби вирішити проблеми, які їх наступники вирішували з легкістю. З іншого боку, деякі передбачувані докази, запропоновані навіть майстрами, пізніше були визнані помилковими. Покоління і навіть епохи не помічали нових ідей, незважаючи на те, що все, що було потрібно, було не технічним досягненням, а просто точкою зору. Приклади сліпоти людей до ідей, які пізніше здаються простими і очевидними, дають захоплююче розуміння роботи людського розуму.

Визнання людського елементу в математиці значною мірою пояснює відмінності в математиці, створені різними цивілізаціями, і раптові сплески, зроблені в нових напрямках завдяки ідеям, наданим генієм. Хоча жоден предмет не приніс такої користі, як математика, завдяки сукупному ефекту тисяч робітників і результатів, у жодному предметі роль великих умів не є більш помітною.

#### ВПРАВИ

1. Назвіть кілька цивілізацій, які сприяли розвитку математики.

2. Які підстави мали єгиптяни і вавилоняни для віри в їхні математичні методи і формули?

3. Порівняйте грецьке і догрецьке розуміння понять математики.

4. Яким був грецький план встановлення математичних висновків?

5. Яким був головний внесок арабів у розвиток математики?

6. У якому сенсі математика є творінням греків, а не єгиптян і вавилонян?

7. Розкритикуйте твердження «Математика була створена греками і дуже мало додалося з їх часу».

##### Теми для подальшого вивчення

Щоб писати на наступні теми, використовуйте книги, перелічені в розділі Рекомендована література.

1. Математичний внесок єгиптян або вавилонян.

2. Математичний внесок греків.

##### Рекомендована література

БОЛЛ, В. В. РОУЗ: Короткий звіт з історії математики, Dover Publications, Inc., Нью-Йорк, 1960.

БЕЛЛ, ЕРІК Т.: Люди математики, Саймон і Шустер, Нью-Йорк, 1937.

Чайлд, В. Гордон: Людина робить себе, Нова американська бібліотека, Нью-Йорк, 1951.

EVES, HOWARD: Вступ до історії математики, Rev. ed., Holt, Rinehart and Winston, Inc., Нью-Йорк, 1964.

НОЙГЕБАУЕР, ОТТО: Точні науки в античності, Прінстонський університет Прес, Прінстон, 1952.

Скотт, Дж.Ф.: Історія математики, Тейлор і Френсіс, Лтд., Лондон, 1958.

СМІТ, ДЕВІД ЮДЖИН: Історія математики, Vol. I, Dover Publications, Inc., Нью-Йорк, 1958.

Струйк, Дірк Дж.: Коротка історія математики, Dover Publications, Inc., Нью-Йорк, 1948.

[\*](#ipg21fn1) Бачити [Розділ 9](#ch9).

## РОЗДІЛ 3

ЛОГІКА І МАТЕМАТИКА

Геометрія приверне душу до істини і створить дух філософії.

ПЛАТОН

3–1 ВСТУП

Математика має свої власні способи встановлення знань, і розуміння математики значно сприяє, якщо спочатку дізнатися, що це таке. У цьому розділі ми вивчимо поняття, які трактує математика; метод, званий дедуктивним доказом, за допомогою якого математика встановлює свої висновки; і принципи або аксіоми, на яких тримається математика. Вивчення змісту і логічної структури математики залишає недоторканим питання про те, як математик знає, які висновки встановити і як їх довести. Тому ми представимо коротке і попереднє обговорення створення математики. Ця тема буде повторюватися, коли ми розглянемо саму тему в наступних розділах.

Оскільки математика, як ми уявляємо цей предмет сьогодні, була створена греками, ми також спробуємо побачити, які особливості грецької думки та культури змусили цих людей змінити те, що єгиптяни та вавилоняни переслідували протягом кількох тисяч років.

3–2 ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИКИ

Першим серйозним кроком, який зробили греки, було наполягання на тому, що математика повинна мати справу з абстрактними поняттями. Давайте подивимося, що це означає. Коли ми вперше дізнаємося про числа, нас вчать думати про колекції конкретних предметів, таких як два яблука, три чоловіки тощо. Поступово і досить підсвідомо ми починаємо думати про числа 2, 3 та інші цілі числа без необхідності пов'язувати їх з фізичними об'єктами. Незабаром ми досягнемо більш просунутої стадії додавання, віднімання та виконання інших операцій з числами без необхідності обробляти колекції об'єктів, щоб зрозуміти ці операції або побачити, що результати узгоджуються з досвідом. Таким чином, ми незабаром переконаємося, що 4 рази 5 має бути 20, незалежно від того, чи представляють ці числа кількість яблук, коней або навіть чисто уявні об'єкти. До цього часу ми дійсно маємо справу з поняттями або ідеями, бо цілих чисел не існує в природі. Будь-яке ціле число є скоріше абстракцією властивості, яка є спільною для багатьох різних колекцій або наборів об'єктів.

Тоді цілі числа є ідеями, і те ж саме справедливо для таких дробів, як , , і образ образтак далі. В останньому випадку також формулювання фізичного відношення частини об'єкта до цілого, будь то пироги, бушелі пшениці або до меншої грошової вартості по відношенню до більшої, знову призводить до абстракції. Математики формулюють операції з дробами, тобто об'єднання частин об'єкта, віднімаючи одну частину від іншої або беручи частину частини, таким чином, щоб результат будь-якої операції над абстрактними дробами узгоджувався з відповідним фізичним виникненням. Таким чином, математичний процес, скажімо, додавання і , образякий дає образ , виражає додавання образ пирога і пирога, і результат говорить нам, скільки частин пирога насправді було б.образ образ

Цілі числа, дроби і різні операції з цілими числами і дробами є абстракціями. Хоча цей факт досить легко зрозуміти, ми, як правило, втрачаємо його з поля зору і викликаємо у себе непотрібну плутанину. Розглянемо приклад. Чоловік заходить у взуттєвий магазин і купує 3 пари взуття по 10 доларів за пару. Комірник міркує тим, що 3 пари раз 10 доларів - це 30 доларів і просить 30 доларів в обмін на 3 пари взуття. Якщо це міркування вірне, то так само правильно для покупця стверджувати, що 3 пари раз по 10 доларів - це 30 пар взуття і виходити з 30 парами взуття, не вручивши комірнику один цент. Клієнт може опинитися у в'язниці, але він може втішити себе, поки знемагає там, що його міркування такі ж здорові, як і міркування комірника.

Джерело труднощів полягає, звичайно, в тому, що не можна множити взуття на долари. Можна помножити число 3 на число 10 і отримати число 30. Практичне і, без сумніву, обов'язкове фізичне тлумачення відповіді в наведеній вище ситуації полягає в тому, що потрібно заплатити 30 доларів, а не виходити з 30 парами взуття. Отже, ми бачимо, що слід розрізняти чисто математичну операцію множення 3 на 10 і фізичні об'єкти, з якими ці числа можуть бути пов'язані.

Цей же момент задіяний в дещо іншій ситуації. Математично образ дорівнює образ. Але відповідний фізичний факт може бути неправдою. Можна бути готовим прийняти 4 півпирога замість 2 цілих пирогів, але жодна жінка не прийме 4 напівсукні замість 2 суконь або 4 напівтуфлі замість 1 пари цілих туфель.

Єгиптяни і вавилоняни дійсно досягли стадії роботи з чистими числами, відокремленими від фізичних об'єктів. Але, як маленькі діти нашої цивілізації, вони навряд чи усвідомлювали, що мають справу з абстрактними сутностями. Навпаки, греки не тільки визнавали числа ідеями, але й підкреслювали, що саме так ми повинні ставитися до них. Грецький філософ Платон, який жив з 428 по 348 рік до нашої ери і чиї ідеї є репрезентативними для класичного грецького періоду, говорить у своїй знаменитій праці «Республіка»:

Ми повинні докладати зусиль, щоб ті, хто має бути головними людьми нашої держави, йшли і вивчали арифметику, а не як дилетанти, але вони повинні продовжувати навчання, поки не побачать природу чисел лише розумом; . . .Арифметика має дуже великий і піднесений ефект, змушуючи душу міркувати про абстрактне число і бунтуючи проти введення видимих або відчутних об'єктів в аргумент.

Греки не тільки підкреслювали відмінність між чистими числами і фізичним застосуванням таких чисел, але вони віддавали перевагу першим, а не другим. Вивчення властивостей чистих чисел, яке вони назвали арифметикою, цінувалося як гідна діяльність розуму, тоді як використання чисел у практичних застосуваннях, логістиці, застарівало як просте вміння.

Геометричне мислення до класичного грецького періоду було ще менш розвиненим, ніж мислення про числа. Для єгиптян і вавилонян слова «пряма» означали не більше ніж натягнуту мотузку або лінію, прокреслену в піску, а прямокутник - ділянку землі особливої форми. Греки почали практику трактування точки, лінії, трикутника та інших геометричних понять як понять. Вони, звичайно, оцінили, що ці ментальні поняття пропонуються фізичними об'єктами, але вони підкреслювали, що поняття відрізняються від фізичних прикладів так само різко, як поняття часу відрізняється від проходження сонця по небу. Натягнута струна є фізичним об'єктом, що ілюструє поняття лінії, але математична лінія не має ні товщини, ні кольору, ні молекулярної структури, ні напруги.

Греки відкрито стверджували, що геометрія має справу з абстракціями. Говорячи про математиків, Платон говорить:

І хіба ви не знаєте також, що, хоча вони використовують видимі форми і міркують про них, вони думають не про них, а про ідеали, на які вони схожі; не про фігури, які вони малюють, а про абсолютний квадрат і абсолютний діаметр ... Вони дійсно прагнуть споглядати самі речі, які можна побачити тільки оком розуму?

На основі елементарних абстракцій математика створює інші, ще більш віддалені від усього реального. Негативні числа, рівняння, що включають невідомі, формули та інші поняття, з якими ми зіткнемося, - це абстракції, побудовані на абстракціях. На щастя, кожна абстракція в кінцевому підсумку походить від інтуїтивно значущих об'єктів або явищ і тому зрозуміла з точки зору них. Розум відіграє свою роль у створенні математичних понять, але розум не функціонує незалежно від зовнішнього світу. Дійсно, математик, який трактує поняття, які не мають фізично реального або інтуїтивного походження, майже напевно говорить дурниці. Тісний зв'язок між математикою та об'єктами та подіями у фізичному світі заспокоює, оскільки це означає, що ми можемо не тільки сподіватися зрозуміти власне математику, але й очікувати фізично значущих і цінних висновків.

Використання абстракцій не властиво математиці. Поняття сили, маси і енергії, які вивчаються у фізиці, є абстрагуваннями від реальних явищ. Поняття багатства, абстрагування від матеріальних благ, таких як земля, будівлі та коштовності, вивчається в економіці. Поняття свободи, справедливості і демократії знайомі в політології. Дійсно, що стосується використання абстрактних понять, відмінність між математикою, з одного боку, і фізичними і соціальними науками, з іншого, не є різкою. Насправді, вплив математики і математичного способу мислення на фізичні науки особливо призвів до все більшого використання абстрактних понять, включаючи деякі, як ми побачимо, які можуть взагалі не мати прямого реального аналога, так само як математична формула має прямий дійсний відповідник.

Сам факт того, що інші дослідження також займаються абстракціями, піднімає важливе питання. Математика обмежується деякими абстракціями, числами і геометричними формами, а також поняттями, побудованими на цих основних. Абстракції, такі як маса, сила і енергія, належать фізиці, а ще інші абстракції - іншим предметам. Чому математика не розглядає також силу, багатство і справедливість? Безумовно, ці поняття також гідні вивчення. Чи домовилися математики з фізиками, економістами та іншими про поділ понять між собою? Обмеження математики числами і геометричними формами є частково історичною випадковістю, а частково навмисним рішенням, прийнятим греками. Числа і геометричні форми вже були введені єгиптянами і вавилонянами, і їх корисність в повсякденному житті була встановлена. Оскільки греки засвоїли зачатки математики від цих цивілізацій, величезна вага традиції могла змусити їх продовжувати практику розгляду математики як вивчення чисел і геометричних фігур. Але люди, такі оригінальні і сміливі в мисленні, як греки, не були б пов'язані тільки традицією, якби не знайшли в числах і геометричних формах гострих і ясних уявлень, які викликали б у них захоплення процесами точного мислення. Однак ще більш вагомою причиною була їхня віра в те, що числові та геометричні властивості та відносини є основними, що вони лежать в основі явищ фізичного світу та дизайну всього Всесвіту. Отже, щоб зрозуміти світ, слід шукати цю математичну сутність. Блиск і глибина їх концепції Всесвіту будуть розкриватися все більше і більше в міру того, як ми продовжимо.

Коли порівнюють догрецьке і грецьке розуміння понять математики і відзначають різкий перехід від конкретного до абстрактного, виникає інше питання. Греки усунули фізичну субстанцію і зберегли тільки ідею. Чому вони це зробили? Напевно складніше думати про абстракції, ніж про конкретні речі. Крім того, здавалося б, спроба вивчити природу, зосередившись лише на декількох аспектах фізичних об'єктів, а не на самих об'єктах, виявиться далеко неефективною.

Що стосується акценту на абстракціях, греки відразу побачили те, що рано чи пізно побачить будь-який мислячий народ. Однією з переваг трактування абстракцій є посилення загальності. Коли дитина дізнається, що 5 + 5 = 10, він одним махом набуває факт, який стосується сотень ситуацій. Аналогічно теорема, доведена про абстрактний трикутник, застосовується до трикутної ділянки землі, музичного ударного інструменту і трикутника, визначеного трьома небесними тілами в будь-який момент часу. Було сказано, що процес абстракції зводиться до надання однієї і тієї ж назви різним речам, але саме це визнання того, що різні об'єкти володіють спільною властивістю, названою в абстракції, несе з собою висновок, що все, що стосується абстракції, буде застосовуватися до декількох об'єктів. Частково секрет сили математики полягає в тому, що вона має справу з абстракціями.

Ще одна перевага абстракції було зрозуміло і грекам. Абстрагування від фізичної ситуації тільки тих властивостей, які підлягають вивченню, звільняє розум від обтяжливих і несуттєвих деталей і дає можливість сконцентруватися на цікавлять особливостях. При бажанні визначити площу ділянки землі актуальні тільки форма і розмір, і бажано думати тільки про них, а не про родючість грунту.

Акцент на математичних абстракціях класичних греків був невід'ємною частиною їх погляду на весь Всесвіт. Вони займалися істинами, і провідні філософські школи, особливо піфагорійці і платоністи, стверджували, що істини можуть бути встановлені тільки на основі абстракцій. Давайте слідувати їхнім аргументам. Фізичний світ представляє органам почуттів різні об'єкти. Але враження, отримані органами почуттів, неточні, минущі і постійно змінюються; Дійсно, почуття можуть бути навіть обдурені, як міражами. Однак істина, за самим своїм значенням, повинна складатися з постійних, незмінних, певних сутностей і відносин. На щастя, інтелект людини, збудженої до роздумів враженнями чуттєвих об'єктів, може піднятися до вищих уявлень про реальності, слабо виявляються для почуттів, і таким чином людина може піднятися до споглядання ідей. Це вічні реальності і справжня мета думки, тоді як просто «речі є тінями ідей, кинутих на екран досвіду».

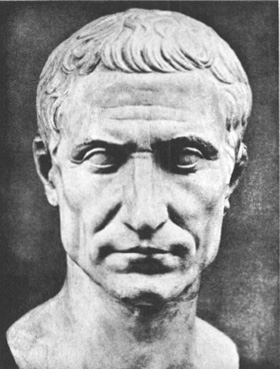
Таким чином, Платон сказав би, що немає нічого реального ні в коні, ні в будинку, ні в красивій жінці. Реальність полягає в універсальному типі або ідеї коня, дому чи жінки. Ідеї, серед яких Платон підкреслював красу, справедливість, розум, добро, досконалість і державу, незалежні від поверхневого вигляду речей, потоку життя, упереджень і викривлених бажань людини; Вони насправді постійні і незмінні, а знання про них тверді і непорушні. Справжні і вічні знання стосуються цих ідей, а не чуттєвих об'єктів. Ця відмінність між розумним світом і світом, відкритим органами почуттів, є надзвичайно важливою для Платона.



Малюнок 3–1.  
Полікліт : Списоносець (Daryphorus). Національний музей, Неаполь.

Висловлюючись повсякденною мовою, фундаментальне знання не стосується того, що їв Іван, чула Марія чи відчував Вільям. Знання повинні піднятися над індивідами і приватними об'єктами і розповісти нам про широкі класи предметів і про людину в цілому. Тому істинне знання обов'язково має стосуватися абстракцій. Платон визнає, що фізичні або чуттєві об'єкти наштовхують на ідеї так само, як діаграми геометрії пропонують абстрактні геометричні поняття. Звідси є сенс вивчати фізичні об'єкти, але не можна губитися в тривіальних і заплутаних дрібницях.

Абстракції математики мали особливе значення для греків. Філософи вказували, що, щоб перейти від пізнання світу матерії до світу ідей, людина повинна навчити свій розум осягати ідеї. Ці найвищі реальності засліплюють людину, яка не готова їх споглядати. Він, кажучи знаменитим порівнянням Платона, схожий на того, хто постійно живе в глибокій тіні печери і раптово виводиться на сонячне світло. Вивчення математики допомагає здійснити перехід від темряви до світла. Математика насправді ідеально підходить для підготовки розуму до вищих форм мислення, оскільки, з одного боку, вона відноситься до світу видимих речей, а з іншого боку, вона має справу з абстрактними поняттями. Отже, через вивчення математики людина вчиться переходити від конкретних фігур до абстрактних форм; Більше того, це дослідження очищує розум, відволікаючи його від споглядання розумного і тлінного і приводячи його до вічних ідей. Ці останні абстракції знаходяться на тому ж ментальному рівні, що і поняття математики. Таким чином, Сократ говорить: «Розуміння математики необхідно для здорового розуміння етики».



Малюнок 3–2.  
Бюст Цезаря. Ватикан.

Підводячи підсумок позиції Платона, можна сказати, що, хоча для практичних потреб достатньо трохи знань геометрії та розрахунків, вищі та досконаліші частини, як правило, піднімають розум над буденними міркуваннями і дозволяють йому зрозуміти кінцеву мету філософії — ідею Добра. Отже, математика є найкращою підготовкою до філософії. З цієї причини Платон рекомендував майбутнім правителям, які повинні були стати філософами-царями, навчатися протягом десяти років, у віці від 20 до 30 років, вивченню точних наук, арифметики, плоскої геометрії, твердої геометрії, астрономії та гармоніки (музики). Часто повторюваний напис над дверима Академії Платона, який стверджує, що ніхто необізнаний в математиці не повинен входити, повністю виражає значення, яке він надавав предмету, хоча сучасні критики Платона читали в цих словах його визнання того, що після вступу не вдасться вивчити його. Ця цінність математичної підготовки привела одного історика до зауваження: «Математика, що розглядається як наука, зобов'язана своїм походженням ідеалістичним потребам грецьких філософів, а не практичним вимогам єгипетської економіки».



Малюнок 3–3.  
Парфенон, Афіни.

Перевага греків абстракціям однаково очевидно в мистецтві великих скульпторів Полікліта, Праксителя і Фідія. Варто лише поглянути на обличчя на [рис.3-1,](#fig3_1)  щоб помітити, що грецька скульптура класичного періоду зупинилася не на конкретних чоловіках і жінках, а на типах, ідеальних типах. Ідеалізація поширювалася на стандартизацію співвідношень частин тіла один з одним. Полікліт вважав, що існують ідеальні числові співвідношення, які фіксують пропорції людського тіла. Досконале мистецтво має відповідати цим ідеальним пропорціям. Він написав книгу «Канон» на цю тему і сконструював «Списоносця» для ілюстрації тези. Ці абстрактні типи різко контрастують з тим, що зустрічається в численних бюстах і статуях приватних осіб і військових і політичних діячів, зроблених римлянами ([рис. 3-2](#fig3_2)).

Грецька архітектура також розкриває акцент на ідеальних формах. Прості і суворі будівлі завжди були прямокутної форми; Навіть співвідношення використовуваних розмірів були фіксованими. Парфенон в Афінах ([рис. 3-3](#fig3_3)) є прикладом стилю і пропорцій, що зустрічаються майже у всіх грецьких храмах.

#### ВПРАВИ

1. Припустимо, повз проїжджає 5 вантажівок з 4 чоловіками в кожній. Щоб відповісти на питання, скільки чоловіків у всіх вантажівках, людина міркує, що 4 чоловіки раз 5 вантажівок - це 20 чоловіків. З іншого боку, якщо є 4 чоловіки, які володіють 5 вантажівками, загальна кількість вантажівок становить 20 вантажівок. Отже, 4 чоловіки раз 5 вантажівок дають 20 вантажівок. Звідки ви знаєте, що відповідь – 20 чоловіків в одному випадку і 20 вантажівок в іншому?

2. Якщо твір 25¢ і 25¢ виходить множенням 0,25 на 0,25, то виходить 0,0625 або 6 ¢. образ Чи варто примножувати гроші?

3. Чи можете ви запропонувати якісь абстрактні політичні чи етичні концепції?

4. Припустимо, що 30 книг буде розподілено між 5 людьми. Оскільки 30 книг, розділених на 5 осіб, дають 6 книг, кожна людина отримує 6 книг. Критикуйте аргументацію.

5. Магазин рекламує, що він надасть кредит у розмірі 1 долара США за кожну покупку на суму 1 долар. Чоловік, який витрачає 6 доларів, пояснює, що він повинен отримати кредит у розмірі 6 доларів, 1 долар або 6 доларів. Але 6 доларів - це 600 ¢, а 1 долар - це 100 доларів. Отже, 600 разів 100 ¢ - це 60 000 або 600 доларів. Здавалося б, вигідніше оперувати практично нікчемним центом, ніж доларами! Що не так?

6. Що означає твердження, що математика має справу з абстракціями?

7. Чому греки зробили математику абстрактною?

3–3 ІДЕАЛІЗАЦІЯ

Геометричні поняття математики абстрактні в тому сенсі, що форми - це ментальні поняття, які реальні фізичні об'єкти просто наближені. Сторони прямокутної ділянки землі можуть бути не зовсім прямими, і кожен кут не буде рівно 90°. Отже, приймаючи такі абстрактні поняття, математика ідеалізує. Але при вивченні фізичного світу математика ідеалізує і в іншому сенсі, що не менш важливо. Дуже часто математики беруться вивчати об'єкт, який не є сферою, і все ж вважають його таким. Наприклад, Земля - це не сфера, а сфероїд, тобто сфера, сплющена зверху і знизу. Однак у багатьох фізичних задачах, які трактуються математично, Земля представлена як досконала сфера. У задачах астрономії велика маса, така як Земля або Сонце, часто розглядається як зосереджена в одній точці.

Роблячи подібні ідеалізації, математик навмисно спотворює або наближає хоча б деякі особливості фізичної ситуації. Навіщо він це робить? Причина зазвичай в тому, що він спрощує проблему і при цьому цілком упевнений, що не припустив ніяких грубих помилок. Якщо дослідити, наприклад, рух оболонки, яка проходить десять миль, різниця між передбачуваною сферичною формою Землі і справжньою сфероїдальною формою не має значення. Насправді, при вивченні будь-якого руху, що відбувається над обмеженою областю, скажімо, на одну милю, може бути достатньо розглядати Землю як плоску поверхню. З іншого боку, якби хтось намалював дуже точну карту Землі, він би врахував, що форма сфероїдальна. Як ще один приклад, щоб знайти відстань до Місяця, досить добре припустити, що Місяць є точкою в просторі. Однак, щоб знайти розмір Місяця, розглядати Місяць як точку явно безглуздо.

Виникає питання, звідки математик знає, коли ідеалізація виправдана? Простої відповіді на це питання немає. Якщо йому доводиться вирішувати ряд подібних завдань, він може вирішити одну, використовуючи правильну фігуру, а іншу, використовуючи спрощену фігуру, і порівняти результати. Якщо різниця не має значення для його цілей, він може зберегти простішу цифру для решти проблем. Іноді він може оцінити помилку, внесену за допомогою більш простої фігури, і може виявити, що ця помилка занадто мала, щоб мати значення. Або математик може зробити ідеалізацію і використовувати результат, тому що це найкраще, що він може зробити. Потім він повинен прийняти досвід як свій орієнтир у вирішенні питання про те, чи достатньо хороший результат.

Ідеалізувати, навмисно вводячи спрощення - це трохи брехати, а брехня - біла. Використання ідеалізацій для вивчення фізичного світу накладає обмеження на те, чого досягає математика, але ми виявимо, що навіть там, де використовуються ідеалізації, отримані знання мають величезну цінність.

#### ВПРАВИ

1. Розрізняйте абстрагування та ідеалізацію.

2. Чи правильно вважати, що лінії зору до Сонця з двох місць А і В на земній поверхні паралельні?

3. Припустимо, ви хотіли виміряти висоту флагштока. Чи було б розумно розглядати флагшток як відрізок лінії?

3–4 МЕТОДИ МІРКУВАННЯ

Існує безліч способів, більш-менш надійних, отримання знань. До авторитету можна вдаватися, як це часто буває при отриманні історичних знань. Можна прийняти одкровення, як це роблять багато релігійних людей. І можна покладатися на досвід. Продукти, які ми їмо, вибираються на основі досвіду. Ніхто заздалегідь шляхом ретельного хімічного аналізу не визначив, що хліб є цілющою їжею.

Ми можемо обійти стороною, згадавши лише такі джерела знання, як авторитет і одкровення, оскільки ці джерела не можуть бути корисними для побудови математики або набуття знань про фізичний світ. Це правда, що в середньовічний період західноєвропейської культури люди стверджували, що всі бажані знання про природу були відкриті в Біблії. Однак ні в одному значному періоді наукової думки ця точка зору не грала ніякої ролі. Досвід, з іншого боку, є корисним джерелом знань. Але є труднощі у використанні цього методу. Ми не повинні хотіти будувати п'ятдесятиповерховий будинок, щоб вирішити, чи достатньо міцна сталева балка певних розмірів, щоб її можна було використовувати у фундаменті. Більше того, навіть якщо доведеться вибрати працездатні розміри, вибір матеріалів може бути марнотратним. Звичайно, досвід не має ніякої користі при визначенні розмірів Землі або відстані до Місяця.

Тісно пов'язаний з досвідом метод експерименту, який полягає у створенні та проходженні серії цілеспрямованих, систематичних дослідів. Це правда, що експерименти по суті є досвідом, але вони, як правило, супроводжуються ретельним плануванням, яке усуває сторонні фактори, і досвід повторюється достатньо разів, щоб отримати достовірну інформацію. Однак експерименти піддаються майже тим же обмеженням, що і досвід.

Чи є авторитет, одкровення, досвід і навіть експерименти єдиними методами отримання знань? Відповідь - ні. Основним методом є міркування, і в межах області міркувань існує кілька форм. Можна міркувати за аналогією. Хлопчик, який розглядає кар'єру в коледжі, може відзначити, що його друг вступив до коледжу і успішно впорався з цим. Він стверджує, що оскільки він дуже схожий на свого друга фізичними і розумовими якостями, він теж повинен досягти успіху в роботі в коледжі. Метод міркування, щойно проілюстрований, полягає в тому, щоб знайти подібну ситуацію або обставину і стверджувати, що те, що було вірним для подібного випадку, має бути істинним для того, про який йде мова. Звичайно, потрібно вміти знайти подібну ситуацію і треба ризикнути, що відмінності не мають значення.

Ще один поширений метод міркувань - індукція. Таким методом міркування люди користуються кожен день. Оскільки людина, можливо, мав невдалий досвід спілкування з кількома універмагами, він приходить до висновку, що з усіма універмагами погано мати справу. Або, наприклад, експерименти показали б, що залізо, мідь, латунь, масло та інші речовини розширюються при нагріванні, і, отже, можна зробити висновок, що всі речовини розширюються при нагріванні. Індуктивні міркування насправді є поширеним методом, який використовується в експериментах. Експеримент, як правило, проводиться багато разів, і якщо кожен раз виходить один і той же результат, експериментатор робить висновок, що результат завжди буде слідувати. Суть індукції полягає в тому, що людина спостерігає повторювані випадки одного і того ж явища і приходить до висновку, що явище буде відбуватися завжди. Висновки, отримані за допомогою індукції, здаються цілком обґрунтованими доказами, особливо коли кількість спостережуваних випадків велика. Таким чином, сонце так часто сходить вранці, що можна бути впевненим, що воно зійшло навіть у ті ранки, коли воно приховане хмарами.

Існує ще третій метод міркування, званий дедукцією. Розглянемо кілька прикладів. Якщо ми приймемо як основні факти, що чесні люди повертають знайдені гроші і що Джон чесний, ми можемо беззаперечно зробити висновок, що Джон поверне гроші, які знайде. Так само, якщо ми почнемо з фактів, що жоден математик не є дурнем і що Джон є математиком, то ми можемо з упевненістю зробити висновок, що Джон не дурень. У дедуктивних міркуваннях ми починаємо з певних тверджень, званих передумовами, і стверджуємо висновок, який є необхідним або неминучим наслідком посилок.

Всі три методи міркування, аналогії, індукції та дедукції, а також інші методи, які ми могли б описати, зазвичай використовуються. Однак існує одна істотна відмінність між дедукцією, з одного боку, і всіма іншими методами міркування, з іншого. У той час як висновок, зроблений за аналогією або індукцією, має лише ймовірність бути правильним, висновок, зроблений шляхом дедукції, обов'язково справедливий. Таким чином, можна стверджувати, що оскільки леви схожі на корів, а корови їдять траву, леви також їдять траву. Цей аргумент за аналогією призводить до помилкового висновку. Те ж саме справедливо і для індукції: хоча експеримент дійсно може показати, що два десятки різних речовин розширюються при нагріванні, з цього не обов'язково випливає, що всі речовини це роблять. При цьому вода, наприклад, при нагріванні від 0° до 4° за Цельсієм[\*](#pg41fn1) не розширюється; Це контракти.

Оскільки дедуктивне міркування має видатну перевагу в тому, що дає безсумнівний висновок, здавалося б очевидним, що завжди слід використовувати цей метод, віддаючи перевагу іншим. Але ситуація не така проста. З одного боку, аналогію та індукцію часто легше використовувати. У випадку аналогії подібна ситуація може бути легко доступною. У випадку індукції досвід часто надає факти без будь-яких зусиль. Те, що сонце сходить щоранку, помічається всіма нами практично автоматично. Крім того, дедуктивні міркування вимагають передумов, які неможливо отримати, незважаючи на всі зусилля. На щастя, ми можемо використовувати дедуктивні міркування в самих різних ситуаціях. Наприклад, ми можемо використовувати його, щоб знайти відстань до Місяця. У цьому випадку і аналогія, і індукція безсилі, тоді як, як ми побачимо пізніше, дедукція швидко отримає результат. Також очевидно, що там, де дедукція може замінити індукцію, засновану на дорогих експериментах, перевага віддається дедукції.

Оскільки ми будемо займатися насамперед дедуктивними міркуваннями, давайте трохи ознайомимося з ними. Ми навели кілька прикладів дедуктивних міркувань і стверджували, що висновки є неминучими наслідками передумов. Розглянемо, однак, наступний приклад. Ми приймемо як приміщення, що

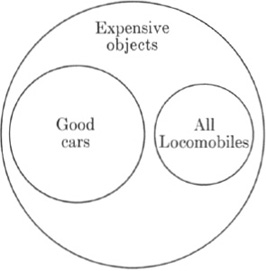
Всі хороші автомобілі коштують дорого

і

Всі локомобілі дорогі.

Можна зробити висновок, що

Всі локомобілі - хороші автомобілі.



Малюнок 3–4.



Малюнок 3–5.

Міркування тут задумані як дедуктивні; Тобто презумпція при прийнятті такого висновку полягає в тому, що він є неминучим наслідком передумов. На жаль, міркування не вірні. Як ми бачимо, що це неправильно? Хороший спосіб зображення дедуктивних аргументів, який дозволяє нам побачити, чи правильні вони чи ні, називається тестом кола.

Відзначимо, що перше приміщення займається автомобілями і дорогими об'єктами. Давайте подумаємо про всі дорогі об'єкти в цьому світі, представлених точками кола, найбільшого кола на [рис.3-4](#fig3_4). Твердження про те, що всі хороші автомобілі дорогі, означає, що всі хороші автомобілі є частиною колекції дорогих об'єктів. Звідси ми малюємо ще одне коло всередині кола дорогих об'єктів, і точки цього меншого кола представляють всі хороші автомобілі. Друга передумова говорить, що всі локомобілі дорогі. Отже, якщо ми представляємо всі локомоболи точками кола, це коло теж має бути намальоване в колі дорогих предметів. Однак ми не знаємо, виходячи з двох приміщень, де розмістити коло, що представляє всі Локомобілі. Вона може, наскільки нам відомо, впасти в тому положенні, яке показано на малюнку. Тоді ми не можемо зробити висновок, що всі локомобобілі є хорошими автомобілями, тому що, якщо цей висновок неминучий, коло, що представляє локомобілі, повинен потрапити всередину кола, що представляє хороші автомобілі.

Багато людей роблять висновок з наведених вище передумов, що всі локомобілі є хорошими автомобілями, і причина того, що вони помиляються, полягає в тому, що вони плутають передумову «Всі хороші автомобілі дорогі» з твердженням, що «Всі дорогі автомобілі хороші». Якби останнє твердження було нашою першою передумовою, то дедуктивний аргумент був би дійсним або правильним.

Розглянемо ще один приклад. Припустимо, ми беремо в якості нашого приміщення, що

Всі професори - вчені люди

і

Деякі професори - розумні люди.

Обов'язково зробимо висновок, що

Які розумні люди вчені?

Може бути, а може і не бути очевидним, що цей висновок правильний. Скористаємося круговим тестом. Малюємо коло, що представляє клас вчених людей ([рис. 3-5](#fig3_5)). Оскільки перша передумова говорить нам, що всі професори є вченими людьми, коло, що представляє клас професорів, повинен потрапляти в коло, що представляє вчених людей. Друга передумова вводить клас розумних людей, і тепер ми повинні визначити, де намалювати це коло. Цей клас повинен включати деяких професорів. Звідси коло має перетинатися з колом професорів. Оскільки останній знаходиться в колі вчених людей, деякі розумні люди повинні належати до класу вчених людей.

Ці приклади дедуктивних міркувань можуть прояснити ще один момент. Визначаючи, чи є даний аргумент правильним або обґрунтованим, ми повинні спиратися лише на факти, наведені в передумові. Ми не можемо використовувати інформацію, якої там явно немає. Наприклад, ми можемо вважати, що вчені люди розумні, тому що для набуття знань вони повинні володіти інтелектом. Але це переконання або факт, якщо воно є фактом, не може вступити в суперечку. Нічого, що можна випадково знати або вірити про вчених або розумних людей, не слід використовувати, якщо явно не вказано в приміщенні. Насправді, що стосується обґрунтованості аргументу, ми могли б так само розглянути передумови

Всі x є y,

Деякі x є z,

Отже, висновок такий:

Деякі z - це y.

Тут ми використали x для професора, y для вченої людини та z для розумної людини . Використання x, y і z робить аргумент більш абстрактним і важчим для утримання в свідомості, але він підкреслює, що ми повинні дивитися тільки на інформацію в приміщеннях і уникати внесення сторонньої інформації про професорів, вчених людей і розумних людей. Коли ми пишемо аргумент у цій більш абстрактній формі, ми також ясніше бачимо, що те, що визначає справедливість аргументу, є формою посилок, а не значенням x, y і z.

Багато дедуктивних міркувань потрапляє в закономірності, які ми ілюстрували. Є, однак, варіації, на які слід звернути увагу. Цілком прийнято, особливо в геометрії, яку ми вивчаємо в середній школі, викладати теореми в тому, що називається «якщо... тоді" форма. Таким чином, можна сказати, якщо трикутник рівнобедрений, то його кути підстави рівні. Можна також сказати, що всі рівнобедрені трикутники мають рівні кути основи; або кути підстави рівнобедреного трикутника рівні. Всі три версії говорять одне і те ж.

Пов'язане з «якщо... Тоді" форма передумови - це пов'язане твердження, яке часто розуміють неправильно. Твердження «якщо людина професор, він учений» не представляє ніяких труднощів. Як зазначалося в попередньому пункті, це еквівалентно «всі професори вчені». Однак твердження «тільки якщо людина професор, вчений він» має зовсім інше значення. Це означає, що для того, щоб бути навченим, треба бути професором, або, якщо людина вчиться, вона повинна бути професором. Таким чином, додавання слова має значення лише для обміну реченнями "якщо" та реченням "тоді".

Ми зіткнемося з численними випадками дедуктивних міркувань у нашій роботі. Предмет дедуктивних міркувань зазвичай вивчається в логіці, дисципліні, яка більш ретельно розглядає дійсні форми міркувань. Однак нам не потрібно покладатися на формальне навчання логіці. У більшості випадків загальний досвід дозволить нам з'ясувати, чи є міркування дійсним чи ні. Якщо ви сумніваєтеся, ми можемо використовувати тест кола. Більше того, математика сама по собі є чудовою областю, з якої можна навчитися міркуванням, і є найкращою вправою в логіці. Закони логіки були фактично сформульовані греками на основі їх досвіду з математичними аргументами.

#### ВПРАВИ

1. Монету підкидають десять разів і кожен раз вона падає головою. Який висновок вимагає індуктивне міркування?

2. Охарактеризуйте дедуктивні міркування.

3. Якими вищими рисами володіє дедуктивне міркування в порівнянні з індукцією і аналогією?

4. Чи можете ви дедуктивно довести, що Джордж Вашингтон був найкращим президентом США?

5. Чи завжди можна застосувати дедуктивні міркування, щоб довести бажане твердження?

6. Чи можете ви дедуктивно довести, що моногамія є найкращою системою шлюбу?

7. Чи справедливі наступні нібито дедуктивні аргументи?

а) Всі хороші автомобілі дорогі. Даффі - дорога машина. Тому Daffy - хороший автомобіль.

б) Всі жителі Нью-Йорка - хороші громадяни. Всі добрі громадяни віддають на благодійність. Тому всі жителі Нью-Йорка віддають на благодійність.

в) Всі студенти коледжу розумні. Всі молоді хлопці розумні. Тому всі молоді хлопці є студентами коледжу.

г) Ті ж приміщення, що і в (с), але висновок: всі студенти коледжу - молоді хлопці.

д) щопонеділка йде дощ, а сьогодні йде дощ; отже, сьогодні має бути понеділок.

е) Жоден порядний народ не проклинає; Американці порядні; тому американці не проклинають.

ж) Жоден порядний народ не проклинає; Американці проклинають; тому деякі американці непристойні.

з) Жоден порядний народ не проклинає; деякі американці непорядні; тому деякі американці проклинають.

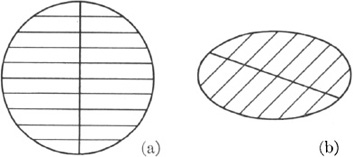
i) Жоден магістрант не має ступеня бакалавра мистецтв; Жоден першокурсник не має ступеня бакалавра мистецтв. Тому всі першокурсники є магістрантами.

8. Якби хтось дав вам дійсний дедуктивний аргумент, але висновок був невірним, де б ви шукали труднощі?

9. Розрізняйте справедливість дедуктивного аргументу і істинність висновку.

3–5 МАТЕМАТИЧНІ ДОКАЗИ

Ми бачили до цих пір в нашому обговоренні міркувань, що існує кілька методів міркування і що всі вони корисні. Ці методи можуть бути застосовані до математичних задач. Припустимо, що хотілося визначити суму кутів трикутника. Він міг намалювати на папері багато різних трикутників або сконструювати деякі з дерева або металу і виміряти кути. У кожному випадку він виявить, що сума настільки близька до 180°, скільки може визначити око і рука. За допомогою індуктивних міркувань він міг зробити висновок, що сума кутів у кожному трикутнику дорівнює 180°. Фактично, вавилоняни та єгиптяни фактично використовували індуктивні міркування для встановлення своїх математичних результатів. Вони повинні були визначити шляхом вимірювання, що площа трикутника дорівнює половині підстави, помноженої на висоту, і, неодноразово скориставшись цією формулою і отримавши достовірні результати, вони прийшли до висновку, що формула правильна.



Малюнок 3–6.  
Середини паралельних акордів лежать на прямій лінії.

Щоб побачити, що міркування за аналогією можна використовувати в математиці, відзначимо спочатку, що центри безлічі паралельних хорд кола лежать на прямій лінії ([рис. 3-6а](#fig3_6)). По суті, ця лінія і є діаметром кола. Тепер еліпс ([рис. 3-6б](#fig3_6)) дуже схожий на коло. Звідси можна зробити висновок, що центри множини паралельних акордів еліпса також лежать на прямій.

Дедукція, безумовно, може бути застосована в математиці. Докази, які вивчаються в евклідовій геометрії, є дедуктивними. В якості іншої ілюстрації ми могли б розглянути наступний алгебраїчний аргумент. Припустимо, потрібно вирішити рівняння x − 3 = 7. Відомо, що рівне, додане до рівних, дає рівних. Якби ми додали 3 до обох частин попереднього рівняння, ми б додали рівності до рівності. Звідси виправдано додавання 3 до обох сторін. Коли це зроблено, виходить x = 10, і рівняння вирішується.

Таким чином, всі три методи застосовні. Можна багато чого сказати про використання індукції та аналогії. Індуктивний аргумент для суми кутів трикутника може бути проведений за лічені хвилини. Аргумент за аналогією, наведений вище, також легко наводиться. З іншого боку, пошук дедуктивних доказів для цих самих висновків може зайняти тижні або ніколи не бути досягнутий середньостатистичною людиною. Власне кажучи, незабаром ми зіткнемося з деякими прикладами припущень, для яких індуктивні докази переважають, але для яких досі не було отримано жодного дедуктивного доказу навіть найкращими математиками.

Незважаючи на корисність і переваги індукції та аналогії, математика не покладається на ці методи для встановлення своїх висновків. Всі математичні докази повинні бути дедуктивними. Кожне доказ являє собою ланцюжок дедуктивних аргументів, кожен з яких має свої передумови і висновок.

Перш ніж розглянути причини цього обмеження на дедуктивне доведення, ми могли б протиставити метод математики методам фізичних і соціальних наук. Вчений вільно робить висновки будь-яким методом міркувань і, якщо вже на те пішло, на основі спостережень, експериментів і досвіду. Він може міркувати за аналогією, як, наприклад, коли він міркує про звукові хвилі, спостерігаючи за водними хвилями, або коли він міркує про можливі ліки від хвороби, що вражає людей, випробовуючи ліки на тваринах. Насправді міркування за аналогією є потужним методом в науці. Вчений також може міркувати індуктивно: якщо він багато разів спостерігає, що водень і кисень об'єднуються, утворюючи воду, він зробить висновок, що ця комбінація завжди буде утворювати воду. На деяких етапах своєї роботи вчений може також міркувати дедуктивно і, по суті, навіть використовувати власне поняття і методи математики.

Щоб ще більше протиставити метод математики методу вченого і, можливо, проілюструвати, наскільки впертим може бути математик, ми могли б розглянути досить відомий приклад. Математики мають справу з цілими числами, або цілими числами, і серед них вони виділяють прості числа. Просте число — це число, яке не має інтегральних дільників, крім самого себе і 1. Таким чином, 11 є простим числом, тоді як 12 не є тому, що воно ділиться, наприклад, на 2. Тепер шляхом фактичного випробування можна виявити, що кожне з перших кількох парних чисел можна виразити як суму двох простих чисел. Наприклад, 2 = 1 + 1; 4 = 2 + 2; 6 = 3 + 3; 8 = 3 + 5; 10 = 3 + 7; . . . . Якщо досліджувати більші і більші парні числа, то всі без винятку виявляють, що кожне парне число можна виразити як суму двох простих чисел. Отже, за допомогою індуктивних міркувань можна зробити висновок, що кожне парне число є сумою двох простих чисел.

Але математик не приймає цей висновок як теорему математики, оскільки він не був доведений дедуктивно з прийнятних посилок. Гіпотеза про те, що кожне парне число є сумою двох простих чисел, відома як гіпотеза Гольдбаха, оскільки вона була вперше запропонована математиком вісімнадцятого століття Крістіаном Гольдбахом, є невирішеною проблемою математики. Математик буде наполягати на дедуктивному доведенні, навіть якщо знадобляться тисячі років, як це буквально відбувається в деяких випадках, щоб знайти його. Однак вчений без вагань скористається цим індуктивно добре підкріпленим висновком.

Звичайно, вчений не повинен дивуватися, виявивши, що деякі його висновки помилкові, оскільки, як ми переконалися, індукція і аналогія не призводять до впевнених висновків. Але здається, що процедура вченого мудріша, оскільки він може скористатися будь-яким методом міркування, який допоможе йому просунути свої знання. Математик у порівнянні здається недалекоглядним або недалекоглядним. Він досягає репутації визначеності, але ціною обмеження своїх результатів тими, які можуть бути встановлені дедуктивно. Наскільки мудрим може бути математик у своєму наполяганні на дедуктивному доведенні, ми дізнаємося, продовжуючи.

Рішення обмежитися математичним доказом дедуктивними міркуваннями було прийнято греками класичного періоду. І вони не тільки відкинули всі інші методи доказів в математиці, але і відкинули всі знання, які єгиптяни і вавилоняни придбали за чотири тисячі років, тому що вони мали лише емпіричне обгрунтування. Чому греки це зробили?

Інтелектуали класичного грецького періоду були значною мірою поглинені філософією, і ці самі люди, оскільки вони володіли інтелектуальними інтересами, були саме тими, хто розвивав математику як систему мислення. Іонійці, піфагорійці, софісти, платоністи та арістотеліанці були провідними філософами, які надали математиці остаточну форму. Заслуга в ініціюванні цього кроку, ймовірно, належить одній школі грецьких філософів-математиків, відомій як іонічна школа. Однак, якщо кредит може бути призначений якійсь одній людині, він належить Фалесу, який жив близько 600 р. до н.е. Хоча Фалес був уродженцем Мілета, грецького міста в Малій Азії, він провів багато років в Єгипті як купець. Там він дізнався, що єгиптяни могли запропонувати в математиці та природничих науках, але, мабуть, він не був задоволений, бо не прийняв би результатів, які не могли б бути встановлені дедуктивними міркуваннями з чітко прийнятних аксіом. У своїй мудрості Фалес сприйняв те, що ми сприймемо, стежачи за історією математики, що очевидне набагато підозріліше, ніж заумне.

Фалес, ймовірно, забезпечив доказ багатьох геометричних теорем. Він здобув велику популярність як астроном і, як вважають, передбачив затемнення Сонця в 585 році до нашої ери. Філософа-астронома-математика можна легко звинуватити в тому, що він непрактичний спостерігач за зірками, але Аристотель говорить нам протилежне. У рік, коли оливок обіцяло бути вдосталь, Фалес проникливо загнав у кут всі масляні преси, які можна було знайти в Мілеті та на Хіосі. Коли оливки дозріли для пресування, Фалес був в змозі здавати преси в оренду за свою ціну. Можливо, Фалес жив в історії як провідний бізнесмен, але він набагато більш відомий як батько грецької філософії та математики. З його часу дедуктивне доведення стало еталоном в математиці.

Слід очікувати, що філософи віддадуть перевагу дедуктивним міркуванням. У той час як вчені вибирають конкретні явища для спостереження і експериментів, а потім роблять висновки за допомогою індукції або аналогії, філософи займаються широкими знаннями про людину і фізичний світ. Для встановлення універсальних істин, таких як те, що людина в основному хороша, що світ влаштований або що життя людини має мету, дедуктивні міркування з прийнятних принципів набагато здійсненніші, ніж індукція або аналогія. Як сказав Платон у своїй «Республіці»: «Якщо люди не можуть дати або отримати причину, вони не можуть досягти того знання, яке, як ми вже говорили, людина повинна мати».

Є ще одна причина, по якій філософи віддають перевагу дедуктивним міркуванням. Ці люди шукають істини, вічні істини. Ми бачили, що з усіх методів міркування тільки дедуктивне міркування дає впевнені і точні висновки. Отже, це метод, який філософи майже обов'язково приймуть. Мало того, що індукція і аналогія не дають абсолютно безперечних висновків, але багато грецьких філософів не прийняли б як факти дані, з якими діють ці методи, тому що вони набуваються органами почуттів. Платон підкреслював ненадійність чуттєвих сприйняттів. Емпіричне знання, як висловився Платон, дає лише думку.

Грецьке перевагу дедукції мало соціологічну основу. На відміну від нашого власного суспільства, в якому банкіри і промисловці користуються найбільшою повагою, в класичному грецькому суспільстві філософи, математики і художники були провідними громадянами. Вищий клас розцінював заробіток на життя як прикру необхідність. Праця забирала у людини час і сили для інтелектуальної діяльності, громадянських обов'язків і обговорення. Ці греки не соромилися висловлювати своє презирство до праці і бізнесу. Піфагорійці, які, як ми побачимо, захоплювалися властивостями чисел і застосовували числа до вивчення природи, висміювали використання чисел в торгівлі. Вони хвалилися, що прагнуть до знань, а не до багатства. Платон також стверджував, що знання, а не торгівля, є метою вивчення арифметики. Вільні люди, проголосив він, які дозволили собі зайнятися справами, повинні бути покарані, а цивілізація, яка займається головним чином матеріальними потребами людини, є не більше ніж «містом щасливих свиней». Ксенофонт, відомий грецький полководець та історик, говорить: «Те, що називається механічним мистецтвом, несе соціальне клеймо і справедливо ганьбиться в наших містах». Аристотель хотів ідеального суспільства, в якому громадянам не доводилося б займатися будь-якими механічними мистецтвами. Серед беотійців, одного з незалежних племен Стародавньої Греції, ті, хто осквернив себе, торгівлею за законом були виключені з державних посад на десять років.

Хто виконував щоденну роботу із забезпечення їжею, дахом над головою, одягом та іншими життєвими потребами? Раби і вільні люди, які не мали права на громадянство, керували підприємствами і домашніми господарствами, виконували некваліфіковану і технічну роботу, керували галузями промисловості і займалися такими професіями, як медицина. З них випускалися навіть вироби вишуканості і розкоші.

З огляду на таке ставлення грецького вищого класу до комерції і торгівлі, неважко зрозуміти перевагу класичної греки до дедукції. Люди, які не «живуть» у повсякденному світі, можуть мало чому навчитися з досвіду, а люди, які не будуть спостерігати і використовувати свої руки для експериментів, не матимуть фактів, на яких можна було б засновувати міркування за аналогією або індукцією. Фактично інститут рабства в класичному грецькому суспільстві сприяв відриву теорії від практики і сприяв розвитку спекулятивної та дедуктивної науки і математики за рахунок експериментів і практичних застосувань.

Над різними культурними силами, які схиляли греків до дедукції, були далекоглядність і мудрість, які відзначають справжній геній. Греки першими визнали силу розуму. Розум був здатністю не тільки додатковою до почуттів, але і більш потужною, ніж органи чуття. Розум може досліджувати всі цілі числа, але органи чуття обмежуються сприйняттям лише декількох одночасно. Розум може охопити землю і небеса; Зір обмежується невеликим кутом зору. Дійсно, розум може передбачити майбутні події, до сприйняття яких почуття сучасників не доживуть. Цей розумовий факультет можна було б експлуатувати. Греки ясно бачили, що якщо людина може отримати одні істини, вона може повністю встановити інші шляхом міркувань, і ці нові істини, разом з першоджерелами, дозволяють людині встановити ще інші істини. Дійсно, можливості примножувалися б величезними темпами. Це був засіб здобуття знань, які або не помічали, або нехтували.

Це дійсно був план, який греки спроектували для математики. Починаючи з одних істин про числа та геометричні фігури, вони могли б вивести інші. Ланцюжок висновків може призвести до нового значного факту, який буде названий теоремою, щоб привернути увагу до її важливості. Кожна теорема поповнювала запас істин, які могли б служити передумовами для нових дедуктивних аргументів, і таким чином можна було побудувати величезний масив знань про основні поняття.

Хоча греки, можливо, були винні в надмірному наголошенні на силі розуму без допомоги досвіду і спостережень для отримання істин, немає сумніву, що, наполягаючи на дедуктивному доведенні як єдиному методі, вони піднялися над практичним рівнем теслярів, геодезистів, землеробів і мореплавців. При цьому вони піднесли предмет математики до системи мислення. Більше того, перевага розуму, яку вони демонстрували, надала цьому факультету високий престиж, яким він зараз користується, і дозволила йому використовувати свої справжні сили. Коли ми дослідимо деякі творіння розуму, які сприяли наступним цивілізаціям, побудованим за грецьким планом, ми оцінимо справжню глибину грецького бачення.

#### ВПРАВИ

1. Порівняйте грецькі та догрецькі стандарти доказу в математиці. Перечитайте відповідні частини [глави 2](#ch2).

2. Розрізняють природничо-математичні науки щодо способів встановлення висновків.

3. Поясніть твердження про те, що греки перетворили математику з емпіричної науки в дедуктивну систему.

4. Чи справедливі наступні дедуктивні аргументи?

а) Всі парні числа діляться на 4. Десять - парне число. Звідси 10 ділиться на 4.

б) Рівні, поділені на рівні, дають рівні. Ділення обох сторін 3x = 6 на 3 означає ділення рівних на рівні. Звідси x = 2.

5. Чи випливає з того, що квадрат будь-якого непарного числа непарний, що квадрат будь-якого парного числа парний?

6. Критикуйте аргумент:

Квадрат кожного парного числа парний є парним, тому що 22 = 4, 42 = 16, 62 = 36, і очевидно, що квадрат будь-якого більшого парного числа також парний.

7. Якщо ми приймаємо передумови, що квадрат будь-якого непарного числа непарний, а квадрат будь-якого парного числа парний, чи випливає дедуктивно, що якщо квадрат числа парний, число повинно бути парним?

8. Чому греки наполягали на дедуктивному доведенні в математиці?

9. Давайте приймемо як належне, що якщо трикутник має дві рівні сторони, протилежні кути рівні і що у нас є трикутник, в якому всі три сторони рівні. Доведіть дедуктивно, що всі три кути рівні в розглянутому трикутнику. Ви також можете використовувати припущення, що речі, рівні одній і тій самій речі, рівні одна одній.

10. Як греки пропонували отримувати нові істини з відомих?

3–6 АКСІОМИ І ВИЗНАЧЕННЯ

З нашого обговорення дедуктивних міркувань ми знаємо, що для застосування таких міркувань ми повинні мати передумови. Звідси виникає питання, які приміщення використовує математик? Оскільки математик міркує про числа та геометричні фігури, він, звичайно, повинен мати факти про ці поняття. Їх не можна отримати дедуктивно, тому що тоді повинні були бути попередні передумови, а якщо продовжувати цей процес назад, то не було б відправної точки. Греки охоче знаходили приміщення. Здавалося безперечним, наприклад, те, що дві точки визначають одну і тільки одну пряму і що дорівнює, додане до рівних, дає рівність.

Для греків приміщення, на яких повинна була будуватися математика, були самоочевидними істинами, і вони називали ці передумови аксіомами. Сократ і Платон вірили, як і багато пізніших філософів, що ці істини вже були в нашій свідомості при народженні і що нам залишається лише згадати їх. А оскільки греки вважали, що аксіоми - це істини, і оскільки дедуктивні міркування давали безперечні висновки, вони також вважали, що теореми - це істини. Цієї точки зору більше не дотримуються, і ми побачимо далі в цій книзі, чому математики відмовилися від неї. Тепер ми знаємо, що аксіоми підказуються досвідом і спостереженням. Природно, щоб бути максимально впевненими в цих аксіомах, ми вибираємо ті факти, які здаються найбільш ясними і достовірними в нашому досвіді. Але ми повинні визнати, що немає гарантії, що ми вибрали істини про світ. Деякі математики вважають за краще використовувати слово припущення замість аксіом, щоб підкреслити цей момент.

Математик також дбає про те, щоб спочатку викласти свої аксіоми і бути впевненим, виконуючи свої міркування, що не використовуються жодні припущення чи факти, які не були так викладені. Існує цікава історія, розказана колишнім президентом Гарварду Чарльзом В. Еліотом, яка ілюструє ймовірність введення необґрунтованих приміщень. Він увійшов в переповнений ресторан і простягнув капелюха швейцару. Коли він вийшов, швейцар відразу ж вибрав капелюх Еліота з сотень на стійках і віддав йому. Він був вражений, що швейцар так добре пам'ятає, і запитав його: "Звідки ти дізнався, що це мій капелюх?" "Я цього не зробив",—відповів швейцар. - Чому ж тоді ти передав його мені? Швейцар відповів: "Тому що ви передали це мені,".

Безсумнівно, не було б завдано ніякої шкоди, якби швейцар припустив, що капелюх, який він повернув президенту Еліоту, належить цьому чоловікові. Але математик, зацікавлений в отриманні висновків про фізичний світ, міг би даремно витратити свій час, якби мимоволі ввів припущення, яке не мав права робити

У логічній структурі математики є ще один елемент, про який ми зараз скажемо кілька слів і повернемося до нього в наступному розділі ([глава 20](#ch20)). Як і інші дослідження, математика використовує визначення. Кожного разу, коли у нас є нагода використовувати концепцію, опис якої вимагає довгого висловлювання, ми вводимо одне слово або фразу, щоб замінити це довге твердження. Наприклад, ми можемо поговорити про фігуру, яка складається з трьох різних точок, які не лежать на одній прямій, і про відрізки ліній, що з'єднують ці точки. Зручно ввести слово трикутник для представлення цього довгого опису. Аналогічно, слово коло представляє множину всіх точок, які знаходяться на фіксованій відстані від певної точки. Певна точка називається центром, а фіксована відстань - радіусом. Визначення сприяють стислості.

#### ВПРАВИ

1. Яких переконань дотримувалися греки щодо аксіом математики?

2. Узагальніть зміни, які греки внесли в природу математики.

3. Чи справедливо сказати, що математика є дитиною філософії?

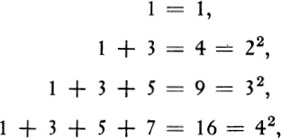
3–7 СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИКИ

Оскільки математичне доведення є строго дедуктивним і лише розумні або привабливі аргументи не можуть бути використані для встановлення висновку, математика була описана як дедуктивна наука або як наука, яка виводить необхідні висновки, тобто висновки, які обов'язково або неминуче випливають з аксіом. Цей опис математики є неповним. Математики також повинні з'ясувати, що доводити і як встановлювати докази. Ці процеси також є частиною математики і вони не є дедуктивними.

Як математик знаходить, що доводити, і дедуктивні аргументи, які призводять до висновків? Найбільш благодатним джерелом математичних ідей є сама природа. Математика присвячена вивченню фізичного світу, і простий досвід або більш ретельне вивчення природи підказує ідею за ідеєю. Розглянемо тут кілька простих прикладів. Після того, як математики вирішили присвятити себе геометричним формам, цілком природно, що повинні виникнути такі питання, як, яка площа, периметр і сума кутів загальних фігур? Більш того, можна навіть побачити, як точне твердження теореми, що підлягає доведенню, випливало б з безпосереднього досвіду роботи з фізичними об'єктами. Математик може виміряти суму кутів різних трикутників і виявити, що всі ці вимірювання дають результати, близькі до 180°. Звідси припущення, що сума кутів у кожному трикутнику дорівнює 180°, виникає як можлива теорема. Щоб вирішити питання, що має більшу площу, багатокутник або коло з однаковим периметром, можна вирізати картонні фігури і зважити їх. Відносні ваги могли б запропонувати твердження теореми про доведення.

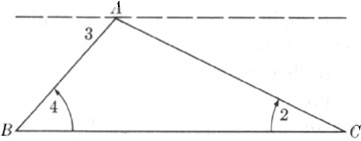
Після того, як деякі теореми були запропоновані прямими фізичними проблемами, інші легко мислити шляхом узагальнення або варіювання умов. Таким чином, знаючи задачу визначення суми кутів трикутника, можна запитати, яка сума кутів чотирикутника, п'ятикутника і так далі? Тобто, як тільки математик починає дослідження, запропоноване фізичною задачею, він може легко знайти нові проблеми, які виходять за рамки початкової.

В областях арифметики і алгебри пряме обчислення з числами, яке є аналогом вимірювання в геометрії, запропонує можливі теореми. Кожен, хто грав з цілими числами, наприклад, безсумнівно, спостерігав такі факти:



Відзначимо, що кожне число праворуч є квадратом числа непарних чисел, що з'являються зліва; таким чином, в четвертому рядку є чотири числа з лівого боку, а в правій частині 42. Загальний результат, який показують ці розрахунки, полягає в тому, що якби перші n непарних чисел були в лівій частині, то сума була б n2. Звичайно, ця можлива теорема не доведена наведеними вище розрахунками. Це також ніколи не могло бути доведено такими розрахунками, бо жодна смертна людина не могла б зробити нескінченну множину обчислень, необхідних для встановлення висновку для кожного n. Однак розрахунки дають математику над чим працювати.

Ці прості ілюстрації того, як спостереження, вимірювання та обчислення припускають можливі теореми, не надто вражаючі або дуже глибокі. У ході подальшої роботи ми побачимо, як фізичні задачі пропонують більш значущі математичні теореми. Однак досвід, вимірювання, обчислення і узагальнення не включають в себе найбільш благодатне джерело можливих теорем. І це особливо вірно в пошуках методів доказу того, що потрібно використовувати більше, ніж рутинні методи. В обох починаннях найважливішим джерелом є творчий акт людського розуму.



3–7

Розглянемо докладніше питання доказів. Припустимо, що шляхом вимірювань виявлено, що сума кутів різних трикутників дорівнює 180°. Тепер треба довести цей результат дедуктивно. Жоден очевидний метод не зробить свою роботу. Потрібна якась нова ідея, і читач, який пам'ятає його елементарну геометрію, згадає, що доказ зазвичай проводиться шляхом проведення лінії через одну вершину (А на [рис. 3-7](#fig3_7)) і паралельно протилежній стороні. Тоді як наслідок раніше встановленої теореми про паралельні прямі виявляється, що кути 1 і 2 рівні, як і кути 3 і 4. Однак кути 1, 3 і кут A самого трикутника складають 180°, і тому те ж саме справедливо і для кутів трикутника. Цей метод доказування не є рутинним. Ідея проведення лінії через А повинна бути поставлена розумом. Деякі методи доказування здаються настільки хитрими і штучними, що викликали критичні зауваження. Філософ Артур Шопенгауер назвав доведення Евклідом теореми Піфагора «доказом пастки для миші» і «доказом, що ходить на ходулях, ні, середнім, підводним доказом».

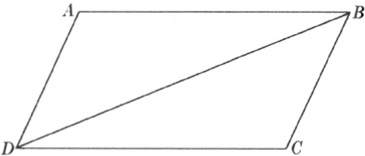
Наведений вище приклад був запропонований, щоб підкреслити той факт, що геніальна математична робота повинна бути виконана з пошуку методів доказів навіть після того, як питання про те, що доводити, буде відкинуто. У пошуках методу докази, як і в пошуку того, що довести, математик повинен використовувати зухвалу уяву, проникливість, творчі здібності. Його розум повинен бачити можливі лінії нападу там, де інші цього не зроблять. Особливо в області алгебри, обчислення і поглибленого аналізу, першокласний математик залежить від того, яке натхнення ми зазвичай асоціюємо зі створенням музики, літератури або мистецтва. Композитор відчуває, що у нього є тема, яка при правильному розвитку створить справжню музику. Досвід і знання музики допомагають йому прийти до цього переконання. Точно так само математик припускає, що у нього є висновок, який випливатиме з аксіом математики. Досвід і знання можуть направляти його думки в належне русло. Модифікації того чи іншого роду можуть знадобитися до того, як буде досягнуто правильного доведення і задовільного твердження нової теореми. Але, по суті, і математик, і композитор рухаються афлатусом, який дозволяє їм побачити остаточну будівлю до того, як буде закладено єдиний камінь.

Ми не знаємо тільки, які психічні процеси можуть привести до правильного розуміння, так само як ми не знаємо, як Кітсу вдалося написати прекрасні вірші або чому Рембрандт зміг створити прекрасні картини. Можна сказати про математичне творіння те, що відомий фізик П. В. Бріджмен сказав про науковий метод, що він полягає в тому, щоб «робити своє найпроклятіше своїм розумом, без заборони». Немає логіки або непогрішного керівництва, яке вказує розуму, як думати. Сам факт того, що багато великих математиків вирішили проблему і зазнали невдачі, і що інший приходить і вирішує її, показує, що розум може щось внести.

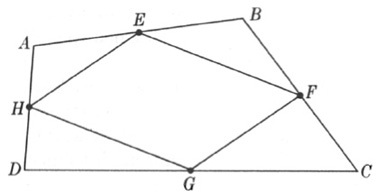
Попереднє обговорення створення математики має виправити кілька помилкових народних вражень. Створюючи математичне доведення, розум не бачить холодних, упорядкованих аргументів, які читається в текстах, а скоріше сприймає ідею або схему, які при правильному формулюванні складають дедуктивне доведення. Формальний доказ, так би мовити, просто санкціонує вже здійснене інтуїцією завоювання. По-друге, дедуктивне доведення не є кращою формою для розуміння використовуваної ідеї або методу. Насправді, дедуктивний аргумент часто приховує ідею, тому що логічна форма не є помітною для інтуїції. Принаймні деталі аргументів затемнюють основні теми. Цінність дедуктивної організації докази полягає в тому, що вона дає можливість творцеві і читачеві перевірити аргументи за мірками точного міркування. По-третє, існує поширене, але помилкове уявлення про те, що вчені і математики повинні тримати свій розум відкритим і неупередженим у проведенні розслідування. Вони не повинні передбачати висновок. Власне, математик повинен спочатку вирішити, що доводити, і цей висновок не тільки не тільки робить, але і повинен передувати пошуку докази, інакше він не знав би, куди рухатися. Не можна сказати, що математик може іноді не робити помилкових здогадок. Якщо він це зробить, його пошук доказу зазнає невдачі або в ході пошуку він зрозуміє, що не може довести, чого домагається, і виправить свою гіпотезу. Але в будь-якому випадку він знає, що намагається довести.

#### ВПРАВИ

1. Розглянемо паралелограм ABCD ([рис. 3–8](#fig3_8)). За визначенням, протилежні сторони паралельні. Тепер введіть діагональ BD. Чи пропонує спостереження можливу теорему, що пов'язує трикутники ABD і BDC?



Малюнок 3–8



3–9

2. Розглянемо будь-яку чотирикутну ABCD ([рис. 3-9](#fig3_9)) і фігуру, утворену з'єднанням середніх точок E, F, G, H сторін чотирикутника. Чи підказує спостереження або інтуїція якийсь важливий факт про чотирикутний EFGH?

3. Формула n2 − n + 41 повинна давати прості числа для різних значень n. Таким чином, коли n = 1,

12 -1 + 41 = 41,

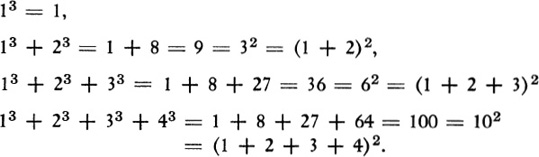
І це прайм. Коли n = 2,

22 -2 + 41 = 43,

І це прайм. Перевірте формулу для n = 3 і n = 4. Чи є результуючі значення формули простими? Чи довели ви, що формула завжди дає прості числа?

4. Чи можете ви вказати умови, при яких два чотирикутника будуть конгруентними, тобто матимуть однаковий розмір і форму?

5. Наступні рядки показують деякі обчислення з сумою кубів цілих чисел:



Яке узагальнення пропонують ці кілька розрахунків?

#### ОГЛЯД ВПРАВ

1. Які підстави мали єгиптяни і вавилоняни для віри в правильність своїх математичних висновків?

2. Порівняйте грецьке і догрецьке розуміння понять математики.

3. Яким був грецький план встановлення математичних висновків?

4. У якому сенсі математика є творінням греків, а не єгиптян і вавилонян?

5. Припустимо, що ми приймаємо передумову, що всі професори є розумними людьми, а всі професори - вченими людьми. Який з наведених висновків обґрунтовано виведений?

а) Деякі розумні люди вчені.

б) Деякі вчені люди розумні.

в) Всі розумні люди вчені.

г) Всі вчені люди розумні.

6. Припустимо, що ми приймаємо передумову, що всі студенти коледжу мудрі, а професори не є студентами коледжу. Який з наведених висновків обґрунтовано виведений?

а) Жоден професор не мудрий.

б) Деякі професори мудрі.

в) Всі професори мудрі.

7. Чи справедливий наступний аргумент?

Всі паралелограми є чотирикутниками, а фігура ABCD - чотирикутником. Звідси фігура ABCD є паралелограмом.

8. Який висновок можна зробити з приміщення,

Кожен успішний учень повинен наполегливо працювати,

і

Джон не працює важко?

9. Сміт каже:

Якщо йде дощ, я ходжу в кіно.

Якщо Сміт ходив у кіно, який висновок можна зробити дедуктивно?

10. Сміт каже:

Я ходжу в кіно тільки якщо йде дощ.

Якщо Сміт ходив у кіно, який висновок можна зробити дедуктивно?

##### Теми для подальшого вивчення

Щоб продовжити будь-яку з цих тем, скористайтеся книгами, переліченими нижче в розділі Рекомендована література.

1. Життя і діяльність піфагорійців

2. Життя і діяльність Евкліда

##### Рекомендована література

БЕЛЛ, ЕРІК Т.: Розвиток математики, 2-е видання, Chaps. 2 і 3, McGraw-Hill Book Co., N.Y., 1945.

БЕЛЛ, ЕРІК Т.: Люди математики, Саймон і Шустер, Нью-Йорк, 1937.

КЛАГЕТТ, МАРШАЛЛ: Грецька наука в античності, Chap. 2, Abelard-Schuman, Inc., Нью-Йорк, 1955.

Коен, Морріс Р. і Е. НАГЕЛЬ: Вступ до логіки та наукового методу, Chaps. 1-5, Harcourt Brace and Co., Нью-Йорк, 1934.

Кулідж, Ю. Л.: Математика великих аматорів, Chap. 1, Dover Publications, Inc., Нью-Йорк, 1963.

ГАМІЛЬТОН, ЕДІТ: Грецький шлях до західної цивілізації, Chaps. 1-3, Нова американська бібліотека, Нью-Йорк, 1948.

ДЖИНС, ДЖЕЙМС: Зростання фізичної науки, 2-е видання, Chap. 2, Cambridge University Press, Кембридж, 1951.

НОЙГЕБАУЕР, ОТТО: Точні науки в античності, Прінстонський університет Прес, Прінстон, 1952.

СМІТ, ДЕВІД ЮДЖИН: Історія математики, т. I., Dover Publications, Inc., Нью-Йорк, 1958.

Струйк, Дірк Дж.: Коротка історія математики, Dover Publications, Inc., Нью-Йорк, 1948.

Тейлор, Генрі Осборн: Стародавні ідеали, 2-е видання, т. I, Chaps. 7-13, The Macmillan Co., Нью-Йорк, 1913.

ВЕДБЕРГ, АНДЕРС: Філософія математики Платона, Алмквіст і Вікселл, Стокгольм, 1955 (для студентів філософії).

[\*](#ipg41fn1) У наукових текстах більш точним терміном вважається «цельсій».

## РОЗДІЛ 4

ЧИСЛО: ФУНДАМЕНТАЛЬНЕ ПОНЯТТЯ

Дивовижний нейтралітет має ці речі математичні, а також дивну участь між речами надприродними, безсмертними, інтелектуальними, простими і неподільними, і речами природними, смертними, розумними, складеними і подільними.

ДЖОН ДІ (1527–1608)

4–1 ВСТУП

Подібно до того, як ми схильні приймати сонце, місяць і зірки як своє перворідство і не цінуємо велич, таємницю і знання, які можна почерпнути зі споглядання небес, так і ми схильні приймати нашу систему числення. Є, однак, і ця різниця. Багато хто з нас не претендували б на останнє і з радістю продали б його за кашу з горщиком. Оскільки ми змушені вивчати числа та операції з числами, коли ми ще занадто молоді, щоб цінувати їх – підготовка до життя, яка навряд чи збуджує наш інтерес до майбутнього – ми дорослішаємо, вірячи, що числа похмурі та нецікаві. Але система числення заслуговує на увагу не тільки як основа математики, але й тому, що вона містить вагомі і красиві ідеї, які піддаються потужному застосуванню.

Серед минулих цивілізацій греки найкраще оцінили диво і силу поняття числа. Звичайно, це був народ з великим інтелектуальним сприйняттям, але, можливо, тому, що вони дивилися на числа абстрактно, вони ясніше бачили свою справжню природу. Сам факт того, що можна абстрагуватися від багатьох різноманітних колекцій предметів таку властивість, як «п'ятірка», вразив греків як дивовижне відкриття. Якщо використовувати смішне, щоб підкреслити піднесене, можна сказати, що грецьке захоплення цифрами було раціональним аналогом істерії, яку відчувають багато молодих і старих американців, коли стикаються з цифрами у вигляді бейсбольних балів і середніх показників биття.

4–2 ЦІЛІ ЧИСЛА ТА ДРОБИ

Першими греками, які, наскільки нам відомо, висловили своє задоволення числами і запропонували філософію, засновану на числах, яка є надзвичайно живою і життєво важливою сьогодні, були піфагорійці. Ця група була заснована в середині шостого століття до нашої ери Піфагором. Ми досить мало знаємо про цю людину. Однак дуже ймовірно, що він народився в 569 році до нашої ери в грецькому поселенні на острові Самос в Егейському морі. Як і багато інших греків, він подорожував до Єгипту та на Близький Схід, щоб дізнатися, що могли запропонувати ці старі цивілізації, а потім оселився в Кротоні, іншому грецькому місті на півдні Італії. Піфагор і його послідовники були одними з перших засновників великої грецької цивілізації, і тому не дивно, що раціональне ставлення, характерне для греків, все ще було оточене в його часи містичними і релігійними доктринами, поширеними в Єгипті і його східних сусідів. Насправді піфагорійці були релігійною сектою, а також вивчали філософію і природу.

Членство в групі було обмежено, а члени зобов'язалися зберігати таємницю. Серед їхніх релігійних доктрин була віра в те, що душа зіпсована тілом. Щоб очистити душу, вони підтримували безшлюбність; Їхні релігійні практики також повинні були бути ефективними для очищення душі. Після смерті душа перевтілювалася в іншу людину або тварину. Як і більшість містиків, вони дотримувалися певних табу. Вони не чіпали білого півня, не ходили по шосе, не використовували залізо, щоб розпалити вогонь, або залишали сліди попелу на горщику.

Секретність групи, її відчуженість і спроба втручання в політичні справи Кротона остаточно збудили жителів цього міста вигнати піфагорійців. Ми достеменно не знаємо, що сталося з Піфагором. Одна історія свідчить, що він втік до Метапонтума, іншого грецького міста на півдні Італії, і був там убитий. Однак піфагорійці продовжували мати вплив на грецьке інтелектуальне життя. Одним з їх помітних членів був філософ Платон.

Піфагорійці були вражені числами і, оскільки вони були містиками, надавали цілим числам значення і значення, які ми зараз вважаємо дитячими. Таким чином, вони розглядали число «один» як сутність або саму природу розуму, оскільки розум міг породити тільки один послідовний набір доктрин. Число «два» ототожнювалося з думкою, ясно, тому що саме значення думки передбачає можливість протилежної думки, а значить, і принаймні двох. «Чотири» ототожнювалося зі справедливістю, тому що це перше число, яке є добутком рівних. Звичайно, можна також думати як 1 раз 1, але для піфагорійців це не було числом у повному розумінні, оскільки воно не представляло кількість. Піфагорійці представляли числа у вигляді точок на піску або камінчиками, і для кожного числа точки або камінчики мали особливе розташування. Таким чином, число «чотири» було зображено як чотири крапки, що вказують на квадрат, і тому квадрат і справедливість також були пов'язані. Чотириквадратний і квадратний шутер все-таки означають людину, яка діє справедливо. «П'ять» означало шлюб, тому що це був союз першого чоловічого числа, три, і першого жіночого числа, два. (Непарні числа були чоловічими, а парні - жіночими.) Число «сім» символізувало здоров'я, а «вісім» - дружбу або любов.

Ми не будемо переслідувати всі ідеї, які піфагорійці розвинули про числа. Що важливо в їх роботах, так це те, що вони першими почали вивчати властивості цілих чисел. Як ми побачимо в наступному розділі, вони також володіли баченням глибоких містиків і бачили, що числа можуть бути використані для представлення і навіть втілення суті природних явищ.

Припущення і результати, отримані піфагорійцями про цілі числа і відношення цілих чисел, або дробів, як ми вважаємо за краще їх називати, були початком тривалого і передбачуваного розвитку арифметики як науки на відміну від арифметики як інструменту для повсякденного застосування. Протягом 2500 років, відколи піфагорійці вперше звернули увагу на важливість чисел, людина не тільки навчилася краще цінувати цю ідею, але й винайшла чудові методи написання кількості та виконання чотирьох арифметичних операцій, тобто честолюбства, відволікання, углювання та глузування, як їх називав Льюїс Керролл. Хоча ці методи письма та роботи з числами в значній мірі знайомі, є кілька фактів, які заслуговують на коментар.

Одним з найважливіших членів нашої нинішньої системи числення є математичне уявлення відсутності величини, тобто нуля. Ми звикли до такого числа і все ж зазвичай не цінуємо два факти про нього. Перша полягає в тому, що цей член нашої системи числення прийшов досить пізно. Ідея використання нуля була задумана індусами і, як і інші їхні ідеї, досягла Європи через арабів. Більш раннім цивілізаціям, навіть грекам, не спадало на думку, що було б корисно мати число, яке позначає відсутність будь-яких об'єктів. З цим пізнім появою числа пов'язаний другий значущий факт, а саме те, що нуль потрібно відрізняти від нічого. Безсумнівно, саме нездатність попередніх народів сприйняти цю відмінність пояснює їх нездатність ввести нуль. Те, що нуль потрібно відрізняти від нічого, легко побачити на кількох прикладах. Оцінка студента на курсі, який він ніколи не проходив, не є оцінкою чи нічим. Однак він може мати нульову оцінку на курсі, який він пройшов. Якщо у людини немає рахунку в банку, його баланс - ніщо. Якщо у нього є рахунок в банку, у нього цілком може бути нульовий баланс.

Оскільки нуль є числом, ми можемо оперувати ним; наприклад, ми можемо додати нуль до іншого числа. Таким чином, 5 + 0 = 5. На відміну від 5 + нічого безглуздо або нічого. Єдине обмеження нуля як числа полягає в тому, що не можна ділити на нуль. Ділення на нуль, так би мовити, нічого не дає. Оскільки так багато помилкових кроків в математиці є результатом ділення на нуль, добре чітко зрозуміти, чому ми не можемо цього зробити. Відповіддю на задачу ділення, скажімообраз, є деяке число, яке при множенні на дільник дає ділене. У нашому прикладі 3 є відповіддю, тому що 3 · 2 = 6. Звідси відповіддю на образ має бути число, яке при множенні на 0 дає 5. Однак будь-яке число, помножене на 0, дає 0, а не 5. Таким чином, немає відповіді на проблему образ. У випадку образ відповіді має бути деяке число, яке при множенні на 0 дає ділене 0. Однак будь-яке число може служити приватним, тому що будь-яке число, помножене на 0, дає 0. Але математика не може терпіти таку неоднозначну ситуацію. Якщо образ виникає і будь-яке число може служити відповіддю, ми не знаємо, яке число взяти, і тому нам не допомагають. Це так, ніби ми запитали у людини дорогу до якогось місця, і він відповів: «Беріть будь-який напрямок».

З наявністю нуля математики нарешті змогли розробити наш нинішній метод запису цілих чисел. В першу чергу рахуємо в одиницях і представляємо великі величини в десятках, десятках десятків, десятках десятків і т. Д. Таким чином, ми представляємо двісті п'ятдесят два на 252. Ліва рука 2 означає, звичайно, два десятки десятків; 5 означає 5 разів 10; а права рука 2 означає 2 одиниці. Поняття нуля робить таку систему запису величин практичною, оскільки дозволяє розрізняти 22 і 202. Оскільки десять грає таку фундаментальну роль, наша система числення називається десятковою системою, а десять - базовою. Використання десяти було, швидше за все, пов'язане з тим, що людина рахувала на пальцях і, коли використовувала пальці на двох руках, вважала число отриманим більшою одиницею.

Оскільки положення цілого числа визначає величину, яку воно представляє, задіяний принцип називається позиційним численням. Десяткова система позиційних позначень обумовлена індусами; однак ця ж схема використовувалася двома тисячоліттями раніше вавилонянами, але з основою 60 і в більш обмеженій формі, оскільки вони не мали нуля.

Операції арифметики, додавання, віднімання, множення і ділення, звичайно, знайомі нам, але, мабуть, не визнається, що ці операції досить складні і дивно ефективні. Вони датуються грецькими часами і поступово еволюціонували, так як були введені вдосконалення методів запису чисел і поняття нуля. Європейці перейняли методи у арабів. Раніше європейці використовували римську систему запису чисел, і операції базувалися на цій системі. Частково тому, що ці останні методи були відносно громіздкими, а частково тому, що освіта була обмежена кількома людьми, ті, хто придбав мистецтво обчислення, вважалися кваліфікованими математиками. Насправді процеси кинули виклик звичайній людині настільки, що йому здавалося, що ті, хто володіє здатністю, повинні володіти магічними здібностями. Хороших калькуляторів називали практиками «чорного мистецтва».

Щоб оцінити ефективність наших теперішніх методів, нам довелося б вивчити старі методи і навіть придбати в них певну зручність, щоб зробити порівняння справедливим. Але ми не можемо шкодувати часу і сил. Можливо, єдиний момент, на якому ми повинні наголосити, полягає в тому, наскільки наші методи арифметики залежать від позиційних позначень. Це видно навіть в простій задачі складання. Щоб додати 387 і 359 сказати, що письмова робота є

образ

Однак при виконанні цієї роботи ми думаємо наступним чином. Складаємо одиниці 7 і 9, «десятки» величин 8 і 5, а «сотні» 3 і 3, окремо. Коли ми додаємо 7 і 9, ми отримуємо 16. Ми визнаємо, що 16 - це 1 · 10 + 6, і так додаємо 1 · від 10 до 13 · 10 вже отримані з 8 і 5. Говоримо, що «несемо» 1 · 10 більше, а замість 13 · 10 отримуємо 14 · 10. Однак 14 · 10 є (10 + 4) · 10 або 1 · 102 + 4 · 10. Таким чином ми пишемо 4 у стовпчику десятків, додаємо 1 · 102 до 6 · 102 вже отримані з 3 і 3, і приходять на 7 · 102. Всі ці кроки, як правило, виконуються досить механічно, записуючи відповідні числа в одиницях, десятках і сотнях місць і використовуючи процес, який називається перенесенням. Якби ми проаналізували процеси віднімання, множення та ділення, ми б знову побачили, що кроки, які ми вивчаємо механічно в початковій школі, є лише скелетними процесами мислення, придатними для позиційної нотації в десятій основі.

Слово про дробах теж може бути по порядку. Природний метод запису дробів, наприклад, образ або образ, для вираження частин цілого не представляє ніяких труднощів розуміння. Однак операції з дробами дійсно здаються дещо довільними і загадковими. Щоб додати образ іобраз, скажімо, проходимо наступний процес:

образ

Що ми зробили, так це виразити кожен дріб в еквівалентній формі так, щоб знаменники тепер були однаковими, а потім додати чисельники. Закон не зобов'язує нас додавати дроби таким чином. Звичайно, було б набагато простіше, якби ми погодилися додавати дроби, додаючи чисельники і додаючи знаменники так, щоб

образ

Насправді, коли ми множимо два дроби, ми множимо чисельники і множимо знаменники так, що здається, що математики вважають за краще надмірно ускладнюватися щодо додавання дробів.

Пояснення цієї, здавалося б, математичної непереносимості просте: операції з дробами сформульовані відповідно до досвіду. Коли хтось має пиріг і образ пиріг, він має в усьому не образ тільки образ пиріг образ . Іншими словами, якщо математичні поняття та операції відповідають досвіду, природа операцій нав'язана нам. У разі множення дробів правильно, що множення чисельників і множення знаменників дасть дріб, який представляє фізичний результат. Таким чином, припустимо, що ми повинні були знайти образ , образтобто образ · образ. Ми думаємо як образ 2 · образ. Зараз

образ

То

образ

Такий же результат виходить при множенні вихідних чисельників і множенні вихідних знаменників.

Операція ділення однієї фракції на іншу представляє трохи більше труднощів. Щоб побачити, як ми приходимо до правильного процесу, почнемо з кількох простих прикладів. Припустимо, нам довелося відповісти на питання про те, скільки третини пирога в 2 пирогах. Математично це питання формулюється так, скільки коштує

образ

Слід зазначити, що одна планка більша за іншу, і довша планка відокремлює чисельник, 2, від знаменника образ. Тепер ми знаємо на фізичних підставах, що можемо отримати 6 третин з 2 пирогів. Отримати цю відповідь арифметично ми можемо, перевернувши знаменник образ і помноживши обернене в чисельник 2. Тобто

образ

Тепер трохи ускладнимо проблему. Скільки двох третин пирога міститься в 2 пирогах? Знову ж таки, це питання формулюється математично як

образ

Ми знаємо за фізичними ознаками, що в 2 пирогах є 3 дві третини пирога. Отримати цю відповідь арифметично ми можемо, перевернувши знаменник і помноживши цей обернений дріб на чисельник. Таким чином

образ

Тепер ускладнимо проблему ще більше. Ми, безумовно, погодимося, що 2 пироги - це те ж саме, що образ і пироги. Якби нам довелося відповісти на питання про те, скільки дві третини пирога міститься в пирогах образ , ми б знали з попереднього прикладу, що відповідь - 3. Як ми могли отримати цю відповідь безпосередньо? Питання в тому, скільки коштує

образ

Перевернемо знаменник і перемножимо обернене в чисельник. Таким чином

образ

Знову ми бачимо, що процес інвертування знаменника і множення його на чисельник дає результат, який ми знаємо за фізичними ознаками, є правильним.

Отже, важливим моментом є те, що правило «ділити один дріб на інший, перевертати знаменник і множити цей обернений на чисельник» покликане зробити математичну операцію результатом, який відповідає досвіду. Це, звичайно, той самий принцип, який застосовується до інших операцій. Логічно можна сказати, що ми визначаємо операції як те, що ми щойно проілюстрували для додавання, множення та ділення, і в наших чисто математичних визначеннях ми нічого не говоримо про узгодження з фізичними фактами. Але, звичайно, визначення були б безглуздими, якби не давали фізично правильних результатів.

Дроби, як і цілі числа, можна записати позиційними позначеннями. Таким чином

образ

Якщо ми зараз погодимося придушити повноваження 10, тобто 10, 100 і вищих сил, де вони зустрічаються, то ми можемо написати образ. Десяткова кома нагадує нам, що перше число насправді , образдруге образі так далі. Вавилоняни використовували позиційні позначення для дробів, але вони використовували базу 60, а не базу 10, як і для цілих чисел. Десяткова база для дробів була введена європейськими алгебраїстами шістнадцятого століття. Звичайно, операції з дробами можуть проводитися і в десятковій формі.

Невтішною особливістю десяткового представлення дробів є те, що деякі прості дроби не можна представити у вигляді десяткових знаків з кінцевим числом цифр. Таким чином, коли ми прагнемо виразити образ як десяткове число, ми виявляємо, що ні 0,3, ні 0,33, ні 0,333 і так далі, недостатньо. Все, що можна сказати в цьому та подібних випадках, це те, що, несучи все більше і більше десяткових цифр, людина наближається все ближче і ближче до дробу, але жодна кінцева кількість цифр ніколи не буде точною відповіддю. Цей факт виражається позначеннями

образ

де точки вказують на те, що ми повинні продовжувати додавати трійки, щоб наближатися до дробу образ все ближче і ближче.

З точки зору додатків, той факт, що деякі дроби не можуть бути виражені десятковими дробами з кінцевою кількістю цифр, не має значення, оскільки ми завжди можемо нести достатню кількість цифр, щоб отримати відповідь настільки точну, наскільки цього вимагає програма.

#### ВПРАВИ

1. Який принцип позиційного числення?

2. Чому число нуль практично незамінне в системі позиційних позначень?

3. У чому сенс твердження, що нуль - це число?

4. Які існують два методи представлення дробів?

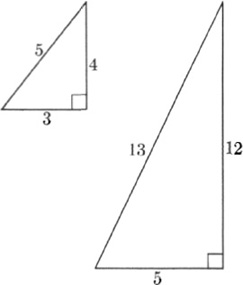
5. Який принцип визначає визначення операцій з дробами?

4–3 ІРРАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА

Піфагорійці, як ми зазначали раніше, першими оцінили саме поняття числа і прагнули використовувати числа для опису основних явищ фізичного і соціального світів. Числа піфагорійцям теж були цікаві і для себе, і для себе. Таким чином, вони любили квадратні числа, тобто такі числа, як 4, 9, 16, 25, 36 і так далі, і помітили, що суми певних пар квадратних чисел, або досконалих квадратів, також є квадратними числами. Наприклад, 9 + 16 = 25, 25 + 144= 169, а 36 + 64= 100. Ці відносини також можна записати як

32 + 42 = 52, 52 + 122 = 132, а 62 + 82 = 102.

Три числа, квадрати яких представляють такі рівності, сьогодні називаються піфагорійськими трійками. Таким чином, 3, 4, 5 складають піфагорійську трійку, тому що 32 + 42 = 52.



Малюнок 4–1

Піфагорійцям ці трійки так сподобалися тим, що, крім інших особливостей, вони мають цікаву геометричну інтерпретацію. Якщо два менших числа - це довжини сторін або рукавів прямокутного трикутника, то третє - довжина гіпотенузи ([рис. 4-1](#fig4_1)). Як піфагорійці знали цей геометричний факт, неясно, але стверджують це вони. Вони також стверджували, що в будь-якому прямокутному трикутнику квадрат довжини одного плеча, доданий до квадрата довжини іншого, дає квадрат довжини гіпотенузи. Це більш загальне твердження досі називають теоремою Піфагора, і доказ цього, такий як ми дізнаємося в геометрії середньої школи, був даний приблизно через 200 років Евклідом. Кажуть, що Піфагор був настільки захоплений цією теоремою, що приніс у жертву вола, щоб відсвяткувати її відкриття.

Ця теорема виявилася скасуванням центральної доктрини піфагорійської філософії і завдала горя і страждань багатьом математикам. Але перш ніж продовжити цю історію, ми повинні розглянути кілька простих властивостей цілих чисел, які втілені в наступних вправах.

#### ВПРАВИ

1. Доведіть, що квадрат будь-якого парного числа є парним числом. [Пропозиція: За визначенням кожне парне число містить 2 як множник.]

2. Доведіть, що квадрат будь-якого непарного числа є непарним. [Пропозиція: кожне непарне число закінчується на 1, 3, 5, 7 або 9.]

3. Нехай стоїть ціле число. Доведіть, що якщо a2 парний, то a парний. [Пропозиція: Використовуйте результат у вправі 2.]

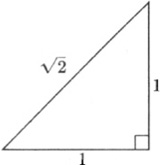
4. Встановіть істинність або хибність твердження, що сума будь-яких двох квадратних чисел є квадратним числом.

Є трагедії і в математиці, і одна з них вразила ту саму групу математиків, які заслуговували кращої долі. Піфагорійці побудували, принаймні для власного задоволення, філософію, яка стверджувала, що всі природні явища і всі соціальні та етичні поняття по суті є лише цілими числами або відносинами між цілими числами. Але одного разу члену групи спало на думку розглянути, здавалося б, найпростіший випадок теореми Піфагора. Нехай кожна рука прямокутного трикутника ([рис. 4-2](#fig4_2)) має довжину 1 одиницю; Як довго, запитав він, гіпотенуза? Теорема Піфагора говорить, що квадрат (довжина) гіпотенузи дорівнює сумі квадратів рукавів. Отже, якщо ми назвемо c невідомою довжиною гіпотенузи, то теорема говорить, що

С2 = 12 + 12

або

С2 = 2.



4–2

Тепер 2 не є квадратним числом, тобто ідеальним квадратом, і тому c не є цілим числом. Але цьому піфагорійцю, безумовно, здавалося розумним, що c має бути дробом; тобто має бути дріб, квадрат якого дорівнює 2. Навіть простий дріб образ близький до правильного значення, тому що образ, а це майже 2. Однак проста проба не дає легко отримати дріб, квадрат якого дорівнює 2. Звідси цей піфагорієць занепокоївся, і він вирішив дослідити питання про те, чи існує дріб, квадрат якого дорівнює 2. Ми розглянемо його міркування, які, наскільки нам відомо, такі ж, як наведені у відомій праці Евкліда з геометрії «Елементи».

Число c, яке ми прагнемо визначити, дорівнює тому, квадрат якого дорівнює 2. Позначимо його через образ. Все, що ми маємо на увазі під цим символом, це те, що він представляє число, квадрат якого дорівнює 2. А тепер припустимо, що образ це дріб a/b, де a і b — цілі числа. Крім того, щоб спростити ситуацію, припустимо, що будь-які фактори, загальні для a і b, скасовані. Таким чином, якби a/b булиобраз, наприклад, ми скасували б загальний множник 2 і записали б його як образ. Отже, ми досі припускали, що

образ

і що А і В не мають спільних факторів.

Якщо [рівняння (1)](#eq_4_1) правильне, то, зводячи в квадрат обидві частини, крок, який використовує аксіому, що дорівнює дорівнює на рівність, дає рівні (оскільки ми множимо ліву частину на образ a/b), отримуємо

образ

Знову ж таки, використовуючи аксіому, що дорівнює прибутковості рівності, ми можемо помножити обидві частини цього останнього рівняння на b2 і записати

образ

Ліва частина цього рівняння є парним числом, оскільки містить 2 як множник. Отже, права сторона також повинна бути парним числом. Але якщо a2 парний, то, згідно з вправою 3 вище, a має бути парним. Якщо a парний, він повинен містити 2 як множник. Тобто a = 2d, де d - деяке ціле число. Якщо ми підставимо це значення a в [(2),](#eq_4_1) отримаємо

образ

З тих пір

2б2 = 4д2,

Ми можемо розділити обидві частини цього рівняння на 2 і отримати

образ

Тепер ми бачимо, що b2 є парним числом, і тому, знову апелюючи до результату у вправі 3, ми знаходимо, що b є парним числом.

У наведеному вище аргументі ми показали, що якщо образ, то a і b повинні бути парними числами. Але з самого початку ми скасували будь-які загальні фактори в a і b; але ми виявили, що a і b все ще містять 2 як загальний фактор. Цей результат суперечить тому, що а і в не мають спільних факторів.

Чому ми приходимо до протиріччя? Оскільки наші міркування правильні, єдина можливість полягає в тому, що припущення, яке образ дорівнює дробу, не є правильним. Іншими словами, образ не може бути співвідношенням двох цілих чисел.

Цей доказ настільки акуратний, що можна практично повірити легенді про те, що Піфагор приніс в жертву вола на честь його створення. Але причин для дискредитації цієї казки є, як мінімум, дві. Перша полягає в тому, що якби всі легенди, що розповідають про те, що Піфагор приніс бика в жертву, були правдою, він не зміг би встигнути на математику. Друга причина полягає в тому, що наведений вище доказ був не тріумфом піфагорійців, а катастрофою. Символ образ є числом, оскільки він представляє довжину прямої, а саме гіпотенузу трикутника на [рис.4-2](#fig4_2). Але це число не є цілим числом або дробом. Піфагорійці, однак, розробили охоплюючу філософію, яка стверджувала, що все у Всесвіті зводиться до цілих чисел. Очевидно, що тоді ця філософія була неадекватною. Дійсно, існування таких чисел було образ настільки серйозною загрозою для піфагорійської філософії, що інша легенда, більш достовірна, стверджує, що піфагорійці, які перебували в морі, коли було зроблено вищезгадане відкриття, викинули за борт члена, який його зробив, і зобов'язалися зберегти відкриття в таємниці.

Але таємниці розкриються, і пізніше греки не тільки дізналися, образ що це не ціле число і не дріб, але вони виявили, що існує нескінченно велика колекція інших чисел, які не є цілими числами або дробами. Таким чином образ образ образ, , , загалом, квадратний корінь будь-якого числа, яке не є досконалим квадратом, корінь куба будь-якого числа, яке не є ідеальним кубом, і так далі, є числами, які не є цілими числами або дробами. Число π, яке є відношенням окружності будь-якого кола до його діаметру, також не є ні цілим числом, ні дробом. Всі ці нові числа називаються ірраціональними числами, слово «ірраціональний» тепер означає, що ці числа не можуть бути виражені як відношення цілих чисел, хоча в піфагорійські часи це означало незгадуване або непізнаване.

Якщо ці ірраціональні числа дійсно настільки поширені і представляють довжини сторін трикутників і окружності кіл через діаметри, чому вони не зустрічалися раніше? Хіба вавилоняни і єгиптяни не натрапили на них? Вони це зробили. Але оскільки вони були стурбовані лише тим, щоб числа служили своїм практичним цілям, вони використовували зручні наближення. Таким чином, коли вони стикалися з такою довжиною, як , образвони задовольнялися використанням такого значення, як 1.4 або 1.41. Для π, як ми зазначали в попередньому розділі, вони використовували значення навіть такі грубі, як 3. Ці народи не тільки використовували такі наближення, але вони ніколи не усвідомлювали, що найскладніший дріб або десятковий ніколи не зможе точно представляти ірраціональне число. Єгиптяни і вавилоняни ставилися до ірраціональних чисел і їх математики в цілому досить легковажно. Ми можемо вітати їх безтурботний дух, але математиками вони ніколи не були.

Греки, як відомо, були іншої інтелектуальної породи і не могли задовольнятися наближеннями, але виявляли і слабкість. Хоча вони визнавали, що існують величини, які не є ні цілими числами, ні дробами, вони були настільки переконані, що поняття числа не може включати в себе нічого іншого, крім цілих чисел або дробів, що вони не прийняли ірраціональні числа як числа. Замість цього вони думали про такі величини тільки як про геометричні довжини або площі. Таким чином, греки ніколи не розробляли арифметику ірраціональних чисел. У своїй астрономічній роботі, наприклад, вони використовували тільки цілі числа і дробу. Труднощі, з якими зіткнулися греки, також поставили в глухий кут всіх математиків аж до сучасності. Найбільші математики відмовлялися приймати ірраціональні числа і дотримувалися грецької процедури мислення про такі величини, як довжини або площі. Всі ці люди хотіли, щоб піфагорійці викинули всі ірраціональні числа за борт, а не людина, яка їх відкрила.

Але потреби суспільства часто зобов'язують стикатися з неприємностями навіть математиків. У сімнадцятому столітті наука стала розвиватися з дивовижною швидкістю, і наука потребує кількісних результатах. Може бути приємно знати, образ що це певна довжина і що образ · образ це область, але цих знань недостатньо, коли потрібні числові результати. І тому, нарешті, математикам довелося прийняти той факт, що якщо вони будуть розглядати чисельно всі величини, що виникають в науковій роботі, вони повинні обробляти ірраціональні числа як числа. Відмова математиків протягом століть надавати ірраціональним статус чисел ілюструє одну з дивовижних особливостей історії математики. Нові ідеї часто так само неприйнятні в цій сфері, як і в політиці, релігії та економіці.

Отже, ситуація, з якою слід зіткнутися прямо, полягає в тому, що крім цілих чисел і дробів існують інші числа. Звичайно, цілком зрозуміло, що цілі числа і дроби повинні були бути створені і використані в першу чергу, бо ці числа виникають в найпростіших фізичних ситуаціях, з якими стикається людина. Ірраціональні числа, з іншого боку, зазвичай не зустрічаються. Тільки застосування такої теореми, як теорема Піфагора, привертає їх нашу увагу, і навіть тоді потрібно пройти через доказ, подібний до розглянутого вище, щоб побачити, що вони не є цілими числами або дробами. Але той факт, що ірраціональні числа запізнюються, не означає, що вони менш прийнятні або менш справжні числа. Подібно до того, як ми поступово поповнюємо наші знання про різноманітність людей і тварин, які існують у нашому фізичному світі, так і ми повинні розширювати наші знання про різновиди чисел і зі справжньою ліберальністю приймати цих незнайомців на тій же основі, що і вже знайомі числа.

Однак, якщо ми хочемо використовувати ірраціональні числа, ми повинні знати, як оперувати ними, тобто як їх додавати, віднімати, множити і ділити. Ми вже відзначали цілими числами і дробами, що якщо ми хочемо, щоб операції відповідали досвіду, ми повинні сформулювати операції відповідним чином. Так само і з ірраціональними числами. Ми могли б визначати додавання, множення та інші операції, як нам заманеться. Але якщо ми хочемо, щоб ці операції представляли фізичні ситуації, ми повинні визначити їх належним чином. Однак справжньої складності тут немає. Оскільки ірраціональні числа є величинами, як і цілі числа і дроби, ми можемо використовувати останні як керівництво для правильних операцій з ірраціональними числами.

Розглянемо кілька прикладів, яких буде достатньо для позначення загальних принципів. Чи варто говорити, що

образ

Щоб відповісти на це питання, розглянемо аналогічне питання: Чи можемо ми сказати, що

образ

В останньому випадку ясно, що 2 + 3 не дорівнює , образбообраз, безумовно, менше 4. Отже, ми не повинні додавати радиканди, тобто 2 і 3, у попереднє рівняння. Тоді можна запитати, скільки коштуєобраз? Оскільки обидві суми є числами, сума також є числом, але її не можна записати більш компактно, ніж образ. Ця невміння об'єднати підсумки не є чимось новим або клопітким. Коли ми додаємо 2 і , образнаприклад, відповідь продовжує бути образ. Зазвичай ми опускаємо знак плюс і пишемо образ, але суми дійсно не поєднуються.

Розглянемо далі, чи

образ

Тут ми також побачимо, що пропонує аналогічна операція з цілими числами. Чи правда, що

образ

Відповідь однозначно так, і тому ми погодимося, що для множення квадратних коренів ми помножимо радиканди. Тобто

образ

Визначення операцій віднімання і ділення також легко визначаються. Таким чином, образ виходить певне число, але різницю не можна записати більш компактно, ніж образ.

Для ділення, скажімообраз, , процедура, як і у випадку множення, пропонується, дотримуючись, що

образ

для цього рівняння просто говорить, що образ. Звідси погодимося, що

образ

Загальний принцип, який ілюструють ці приклади, полягає в тому, що операції з ірраціональними числами визначаються таким чином, щоб узгоджуватися з тими ж операціями над цілими числами, коли останні виражаються як корені. Ми могли б викласти наші визначення в загальній формі, але в цьому немає необхідності.

У додатках ми часто апроксимуємо ірраціональні числа дробами або десятковими дробами, тому що фактичні фізичні об'єкти все одно не можуть бути побудовані точно. Таким чином, якби нам довелося побудувати довжину, яка строго повинна бути , образми б приблизно образ. Оскільки (1.4)2 = 1.96, а 1.96 - це майже 2, ми могли б наблизитися образ до 1.4. Якби ми бажали більш точного наближення, ми могли б визначити до сотої число квадрат якого наближається до 2. Таким чином, оскільки

(1,41)2 = 1,988 і (1,42)2 = 2,016,

Ми бачимо, що 1,41 є хорошим дводесятковим наближенням образ. Звичайно, ми могли б ще більше покращити точність наближення. Однак ми повинні усвідомлювати, що незалежно від того, скільки знаків після коми ми використали, ми ніколи не отримаємо числа, яке є саме образ тому, що будь-який десятковий розряд з кінцевим числом цифр або цілим числом плюс такий десятковий знак є просто ще одним способом запису дробу, тоді образ як, як показав наведений вище доказ, ніколи не може дорівнювати частці двох цілих чисел.

Той факт, що ми часто наближаємося до ірраціонального числа, коли хочемо щось сконструювати, викликає питання, яке заслуговує на відповідь. Питання в тому, чому б нам не наблизити ірраціональні числа, де б вони не виникали, і не забути про операції з ірраціоналами як такими? Наприклад, щоб обчислити образ , ми могли б наблизитиобраз, скажімо, 1,41, приблизне на 1,73, образ а потім помножити 1,41 на 1,73. Відповідь - 2.44, а оскільки (2.44)2 дорівнює 5.95, ми бачимо, що ми маємо гарне наближення до . образ Якби ми хотіли точнішої відповіді, ми могли б приблизно і точніше, образ образ а потім примножити. Одна з причин, чому ми не наближаємося до власне математики, полягає в тому, що математика є точною наукою. Він наполягає на міркуваннях, настільки суворих, наскільки люди можуть це зробити. Ми платимо ціну за цю суворість, витрачаючи більше думок і зусиль, але ми побачимо, що математика зробила свій внесок лише тому, що вона наполягає на точності.

Також є практична перевага в роботі з ірраціональними числами як такими. Припустимо, що якась задача вимагала від нас обчислення , образтобто образ. Людина, яка наполягає на наближенні, тепер наблизиться образ до деякої кількості знаків після коми, наприклад, 1,732, а потім обчислить (1,732)4 У той час як практичній людині потрібна година, щоб обчислити і перевірити свою арифметику, математик відразу побачить, що

образ

і міг провести решту години в освіжаючому сні. Більш того, відповідь математика точна, тоді як відповідь практичної людини не точна навіть до чотирьох демічних місць, з яких він почав, тому що добуток двох приблизних чисел менш точний, ніж будь-який множник. Щоб отримати відповідь з точністю до чотирьох знаків після коми, практичній людині довелося б використовувати наближення, образ що містить сім знаків після коми, а потім помножити.

Ірраціональне число є першою з багатьох складних ідей, які математик ввів, щоб думати і справлятися з реальним світом. Математик створює ці поняття, розробляє способи роботи з ними, які відповідають реальним ситуаціям, а потім використовує свої абстракції, щоб подумати про явища, до яких застосовуються ідеї.

#### ВПРАВИ

1. Висловлюйте відповіді на наступні проблеми максимально стисло:

a) образ

b) образ

c) образ

d) образ

e) образ

f) образ

g) образ

h) образ

i) образ

j) образ

k) образ

2. Спростіть наступне:

a) образ

b) образ

c) образ

[Пропозиція: образ]

3. Піддайте критиці наступний аргумент: Жодне ірраціональне число не може бути виражене десятковим числом з кінцевим числом десяткових розрядів. Число образ не можна виразити десятковим числом з кінцевим числом десяткових розрядів. Отжеобраз, ірраціональне число.

4–4 ВІД'ЄМНІ ЧИСЛА

Ще одне доповнення до системи числення, яке значно розширило можливості математики, походить з далекої Індії. Числа зазвичай використовуються для позначення суми грошей, зокрема суми грошей, якою володіє людина. Можливо, тому, що індуси частіше були в боргах, їм спало на думку, що також було б корисно мати цифри, які відображають суму грошей, яку людина заборгувала. Тому вони винайшли те, що зараз називається від'ємними числами, тоді як раніше відомі числа називаються позитивними. Так з'явилися числа, які ми позначаємо −3, − образі −.образ Там, де необхідно відрізнити явно позитивні числа від негативних або підкреслити, що позитивно, на відміну від негативного, пишуть +3 або + образ замість 3 або образ.

Не потрібно, до речі, використовувати такі символи, як −3 для представлення негативного аналога 3. Сучасні банки і великі комерційні корпорації, які постійно мають справу з від'ємними числами, часто пишуть їх червоним чорнилом, тоді як позитивні числа пишуться чорним чорнилом. Однак ми виявимо, що розміщення знака мінус перед числом для позначення від'ємного числа є зручністю.

Використання позитивних і негативних чисел не обмежується поданням активів і боргів. Один представляє температуру нижче 0° як від'ємні температури, тоді як температура вище 0° є позитивними. Аналогічно висоти над і нижче рівня моря можуть бути представлені позитивними і негативними числами відповідно. Іноді зручно представляти час після і до певної події позитивними і негативними числами. Наприклад, використовуючи народження Христа як подію, 50 рік до нашої ери можна так само описати як рік -50.

Щоб отримати більше користі від концепції від'ємних чисел, повинна бути можливість оперувати ними так само, як ми оперуємо додатними числами. Операції з від'ємними числами і з негативними і додатніми числами разом легко зрозуміти, якщо мати на увазі фізичне значення цих операцій. Наприклад, припустимо, що у чоловіка є активи в 3 долари і борги в 8 доларів. Яке його чисте багатство? Очевидно, що чоловік має борг у 5 доларів. Цей же розрахунок представляється в плані позитивних і негативних чисел твердженням, що суму 8 доларів потрібно брати з 3 доларів, тобто 3 − 8, або що до активів в 3 долари необхідно додати борг в 8 доларів, тобто + 3 + (-8). Відповідь виходить шляхом віднімання меншого числового значення (тобто меншого числа без урахування знака) з більшого числового значення і надання відповіді знака, прикріпленого до більшого числового значення. Тобто від 8 віднімаємо 3 і називаємо відповідь негативним, тому що до більшого числового значення, а саме 8, додається знак мінус.

Оскільки від'ємні числа представляють борги, а віднімання зазвичай має фізичне значення «відняти» або «зняти», то віднімання негативного числа означає зняття боргу. Таким чином, якщо у людини є активи, скажімо, 3 долари, але ця цифра вже враховує борг в 8 доларів, то зняття або списання боргу залишає людині активи в 11 доларів. Математично скажемо +3 − (-8) = + 11. Словом, щоб відняти негативне число, додаємо відповідне позитивне число.

Припустимо, чоловік влазить в борги з розрахунку 5 доларів в день. Тоді через 3 дні після заданої дати у нього буде 15 доларів боргу. Якщо позначити борг в 5 доларів як -5, то влізти в борг з розрахунку 5 доларів в день протягом 3 днів можна сформулювати математично як 3 · (−5) = −15. Тобто множення позитивного і від'ємного числа дає від'ємне число, числове значення якого є добутком двох заданих числових значень.

У тій самій ситуації, в якій людина влазить у борги з розрахунку 5 доларів на день, його активи за три дні до даної дати на 15 доларів більше, ніж на дану дату. Якщо представити час до даної або нульової дати на −3, а втрати за день як -5, то його відносне фінансове становище 3 дні тому можна виразити як − 3 · (− 5) = + 15; Тобто, щоб розглянути його активи три дні тому, ми б помножили борг за день на −3, тоді як для розрахунку фінансового стану на три дні в майбутньому множимо на +3. Отже, результат +15 у першому випадку порівняно з − 15 у другому.

Є ще одне визначення від'ємних чисел, яке легко видається розумним. Для позитивних чисел і нуля ми говоримо з очевидних причин, що 3 більше образ 2, що 2 більше , і що будь-яке додатне число більше нуля. Кажуть, що негативні числа менші за додатні та нульові. Крім того, ми говоримо, що −5 менше −3, або що − 3 більше −5. Якщо розглядати ці різні числа як такі, що представляють багатство людей, то згода щодо їх порядку відповідає нашому звичайному розумінню відносного багатства. Особа, чиє матеріальне становище −3, багатша, ніж особа, чий статус −5; Краще 3 долари, ніж 5 доларів боргу. До речі, символ > використовується для позначення «більшого ніж» як у 5 > 3, а символ < позначає «менше ніж» як у −5 < −3.

Взаємне розташування різних позитивних і негативних чисел і нуля легко запам'ятовується, якщо візуалізувати ці числа у вигляді точок на прямій, як показано на [рисунку 4-3](#fig4_3). Цифра дійсно не відрізняється від отриманої при переміщенні шкали термометра в горизонтальне положення.

образ

4–3

Наведені вище ситуації, які ілюструють, як були запропоновані визначення операцій з додатними і від'ємними числами, звичайно, далеко не єдині, в яких використовуються позитивні і негативні числа. Дійсно, корисність від'ємних чисел навряд чи була б великою, якби це було так. Однак ці прості фінансові операції показують не тільки те, як математики прийшли до визначень, але і те, що немає більшої загадки про негативні числа, ніж про позитивні. Визначення представляють в абстрактній формі те, що відбувається фізично, і, як і всі числа, ми можемо мислити з точки зору абстракцій, щоб прийти до знання фізичних подій.

Читачеві може бути приємно знати, що поняттю негативних чисел, як і поняттю ірраціональних чисел, математики чинили опір протягом декількох сотень років. Історія математики ілюструє досить важливе спостереження про те, що важче домогтися прийняття істини, ніж виявити її. Математикам, для яких «число» означало цілі числа і дроби, було важко прийняти негативні числа як істинні. Вони також століттями не усвідомлювали, що математичні поняття є штучними абстракціями, які можуть бути введені за бажанням, якщо вони можуть служити корисним цілям.

#### ВПРАВИ

1. Припустимо, що чоловік має 3 долари і має борг у розмірі 5 доларів. Яка його чиста вартість?

2. Припустимо, що чоловік винен 5 доларів, а потім понесе новий борг у розмірі 8 доларів. Використовуйте негативні числа для розрахунку його фінансового стану.

3. Припустимо, чоловік винен $5, а заробляє $8. Використовуйте позитивні та негативні числа, щоб розрахувати його чисту вартість.

4. Припустимо, чоловік винен $13, а борг $8 анулюється. Використовуйте від'ємні числа, щоб розрахувати його чисту вартість.

5. Чоловік втрачає гроші в бізнесі з розрахунку $100 на тиждень. Позначимо цю зміну його активів на − 100 і позначимо час в майбутньому позитивними числами, а час в минулому - негативними. Скільки втратить чоловік за 5 тижнів? Скільки ще коштував чоловік 5 тижнів тому?

4–5 АКСІОМИ ЩОДО ЧИСЕЛ

У попередньому розділі ми говорили, що математика виходить з дедуктивних міркувань з явно викладених аксіом. Але поки що в цьому розділі ми нічого не сказали про аксіоми. Причина просто в тому, що аксіоми щодо чисел є настільки очевидними властивостями, що ми використовуємо їх автоматично, не усвідомлюючи, що ми це робимо.

Цю ситуацію, можливо, краще зрозуміти за допомогою аналогії. Всякий раз, коли дитина під час гри підкидає м'яч у повітря, він очікує, що м'яч впаде. Він дійсно припускає, що всі кинуті вгору кулі впадуть. Звичайно, це припущення добре обґрунтовано на досвіді; Тим не менш, очікування дитини про те, що м'яч впаде, є вирахуванням з щойно викладеного припущення і додатковою передумовою про те, що він підкидає м'яч у повітря. Визнання того факту, що він зробив припущення, дає зрозуміти міркування, свідомі чи несвідомі, що стоять за актом.

Щоб зрозуміти дедуктивний процес в математиці чисел, а також в геометрії, ми повинні визнати існування і використання аксіом. Ми не соромимося сказати, що 275 + 384 = 384 + 275. Звичайно, ми не додали 384 об'єкти до 275, порахуйте загальну суму, потім додайте 275 об'єктів до 384, порахуйте цю загальну суму і перевірте, чи дві суми збігаються. Швидше, кожного разу, коли в нашому досвіді ми об'єднували дві групи об'єктів, ми виявляли, що ми отримуємо однакову загальну колекцію незалежно від того, чи ставимо ми першу групу з другою, чи другу з першою. Звичайно, наші докази того, що порядок додавання є несуттєвим, обмежуються невеликою кількістю випадків, тоді як на практиці ми використовуємо цей факт з усіма числами. Отже, ми дійсно робимо припущення, а саме, що для будь-яких двох чисел a і b, інтегральних, дробових, ірраціональних і негативних, порядок складання не вплине на результат. Таким чином, наше припущення також включає твердження, що образ. Важливо з іншої причини визнати, що це припущення робиться. Цифри - це не яблука і не корови. Вони є абстракціями з фізичних ситуацій. Математика працює з цими абстракціями для того, щоб вивести інформацію про фізичні ситуації. Однак якщо аксіоми підібрані невдало, відрахування застосовуватися не будуть. Отже, добре відзначити, які припущення використовуються, і переконатися, що вони добре обґрунтовані досвідом.

Тому звернемо увагу на аксіоми, які ми використовували і будемо використовувати надалі. Перша аксіома - та, що розглядається в попередньому абзаці:

АКСІОМА 1. Для будь-яких двох чисел a та b,

А + В = В + А.

Аксіома називається комутативною аксіомою додавання, оскільки вона говорить, що ми можемо комутувати або міняти місцями порядок двох чисел, які потрібно додати. Відзначимо, що віднімання не є комутативним, тобто 3 − 5 не дорівнює 5 − 3.

Якби нам потрібно було обчислити 3 + 4 + 5, ми могли б спочатку додати 4 до 3, а потім додати 5 до цього результату, або ми могли б додати 5 до 4, а потім додати цей результат до 3. Звичайно, результат однаковий в двох випадках, і саме про це говорить наша друга аксіома.

АКСІОМА 2. Для будь-яких чисел a, b і c,

(А + В) + С = А + (В + С).

Ця аксіома називається асоціативною аксіомою додавання , тому що ми можемо пов'язати три числа двома різними способами при виконанні складання.

Дві аксіоми, які ми тільки що розглянули, мають свої аналоги для операції множення.

АКСІОМА 3. Для будь-яких двох чисел a та b,

а · b = b · а.

Ця аксіома називається комутативною аксіомою множення. До речі, крапка, яка використовується для позначення множення, опускається, якщо немає небезпеки непорозуміння. Таким чином, ми також могли б записати ab = ba. Аксіома явно є властивістю чисел; Однак ми іноді не визнаємо, що це застосовно. Багато студентів соромляться писати 5 · a замість · 5. Але комутативна аксіома говорить, що два вирази рівні. У цьому контексті можна зазначити, що операція ділення не є комутативною, бо 4 ÷ 2 не дорівнює 2 ÷ 4.

АКСІОМА 4. Для будь-яких трьох чисел a, b і c,

(ab)c = a(bc).

Ця аксіома називається асоціативною аксіомою множення. Таким чином, (3·4)5 = 3(4·5).

Також знаходимо в своїй роботі з числами, що зручно використовувати число 0. Щоб формально визнати, що існує таке число і що воно володіє властивостями, яких вимагає його фізичний зміст, ми констатуємо іншу аксіому.

АКСІОМА 5. Існує унікальне число 0 таке, що

а) 0 + a = a для кожного числа a,

б) 0 · a = 0 для кожного числа a,

в) якщо ab = 0, то або a = 0, або b = 0, або обидва дорівнюють 0.

Число 1 - це інше, властивості якого дещо особливі. Знову ж таки, з фізичного значення 1 ми знаємо, які його властивості, але якщо виправдати операції з 1, апелюючи до аксіом, а не до фізичного сенсу, має бути твердження, яке говорить нам, що це за властивості. У випадку з 1 досить вказати шосту аксіому.

АКСІОМА 6. Існує унікальне число 1 таке, що

1 · a = a

для кожного числа А.

Окрім додавання та множення будь-яких двох чисел, ми також маємо фізичне використання операцій віднімання та ділення. Ми знаємо, що при будь-яких двох числах a і b існує число c, яке виникає, коли b віднімається від a. З практичної точки зору корисно визнати, що віднімання - це зворотна операція до додавання. Це просто означає, що якщо нам потрібно знайти відповідь на 5 − 3, ми можемо і, по суті, запитати себе, яке число, додане до 3, дає 5. Якщо ми знаємо додавання, то можемо відповісти на задачу віднімання. Навіть якщо ми отримуємо відповідь спеціальним процесом віднімання, а це робимо у випадку великих чисел, ми перевіряємо його, додаючи результат до того, що ми відняли, щоб побачити, чи дає він вихідне число чи minuend. Звідси задача на віднімання, така як 5 − 3 = x, дійсно запитує, яке число x , додане до 3, дає 5, тобто x + 3 = 5.

У нашому логічному розвитку системи числення ми хочемо стверджувати, що ми можемо відняти будь-яке число з будь-якого іншого числа, і ми формулюємо це твердження так, щоб сенс віднімання був саме тим, чим він є, зворотним до складання.

АКСІОМА 7. Якщо a і b є будь-якими двома числами, існує унікальне число x таке, що

А = В + Х.

Звичайно, кількість x - це те, що ми зазвичай позначаємо a − b.

Відношення ділення до множення також є відношенням оберненої операції. Коли ми шукаємо відповідь на запитання, образ ми можемо випадково дізнатися безпосередньо з досвіду, що відповідь 4. Але якщо ми цього не зробимо, ми можемо звести задачу про ділення до задачі множення і запитати, яке число, x, помножене на 2, дає 8, і якщо ми знаємо множення, ми можемо знайти відповідь. Тут також, як і у випадку з відніманням, навіть якщо ми використовуємо спеціальний процес ділення, такий як довге ділення, щоб знайти відповідь, ми перевіряємо відповідь, множачи дільник на приватне, щоб побачити, чи є добуток діленим. Причина цього полягає просто в тому, що основне значення a / b полягає в тому, щоб знайти деяке число x таке, що bx = a.

У нашому логічному розвитку системи числення ми стверджуємо, що ми можемо розділити будь-яке число на будь-яке інше число (крім 0), і ми формулюємо твердження так, щоб сенс ділення був саме тим, чим він є насправді, зворотним множенням.

АКСІОМА 8. Якщо a і b є будь-якими двома числами, за винятком того, що b ≠ 0, то існує унікальне число x таке, що

bx = a.

Звичайно, x - це число, яке зазвичай позначається a / b.

Наступна аксіома не зовсім настільки очевидна. У ньому сказано, наприклад, що 3·6 + 3·5 = 3(6 + 5). У цьому прикладі ми можемо виконати розрахунок, щоб побачити, що ліва і права сторони рівні, але це дійсно не потрібно. Припустимо, у нас було 157 корів в одному стаді і 379 в іншому, і кожне стадо збільшилося в сім разів. Загальна кількість великої рогатої худоби тоді становить 7 · 157 + 7 · 379. Але якби початкові два стада були одним стадом з 157 + 379 коровами, і це єдине стадо збільшилося в сім разів, ми мали б 7(157 + 379) корів. Фізично зрозуміло, що у нас зараз така ж кількість корів, як і раніше, тобто що 7 · 157 + 7 · 379 = 7(157 + 379). Викладена в загальних рисах, аксіома така:

АКСІОМА 9. Для будь-яких трьох чисел a, b і c,

Ав + Ас = А(В + С).

Ця аксіома, звана дистрибутивної аксіомою, дуже корисна. Наприклад, для розрахунку 571 · 36 + 571 · 64 Ми можемо застосувати аксіому, щоб стверджувати, що ця величина дорівнює 571(36 + 64) або 571 · 100 або 57 100. Ми часто говоримо, що врахували кількість 571 із суми 571 · 36 + 571 · 64.

Слід зазначити, що з

Ав + Ас = А (В + С)

Можна також констатувати, що

ba + ca = (b + c)a,

Тому що в кожному члені першого рівняння ми можемо застосувати комутативну аксіому множення для зміни порядку множників.

Ми часто використовуємо другу форму дистрибутивної аксіоми. Таким чином, припустимо, що a - деяке число і ми хочемо обчислити 5a + 7a. Ми можемо замінити цю суму на (5 + 7) а, і отримати 12а.

Дистрибутивна аксіома може бути застосована і в наступній ситуації. Припустимо, ми повинні розрахувати

образ

Може виникнути спокуса скасувати два числа 296. Але це неправильно. Дана фракція означає

образ

І дистрибутивна аксіома говорить нам, що ми можемо писати замість цього

образ

Крім наведених аксіом, ми маємо такі очевидні властивості чисел:

АКСІОМА 10. Величини, рівні одній і тій же величині, рівні між собою.

АКСІОМА 11. Якщо до них додаються, віднімаються, множаться або діляться на рівні величини, результати рівні. Однак ділення на нуль не допускається.

Набір аксіом, які ми тільки що привели, не є повним, тобто не становить логічної основи для всіх властивостей позитивних і негативних цілих чисел, дробів і ірраціональних чисел. Однак множина дійсно дає логічну основу для того, що зазвичай робиться з числами в звичайній алгебрі. Більше того, це дає певне уявлення про те, що являє собою аксіоматична основа математичної роботи з числами.

Тепер, коли у нас є аксіоми, що ми з ними робимо? Ми можемо довести теореми про числа. Розглянемо кілька прикладів. Від'ємні числа були введені для представлення фізичних подій, таких як борги або час до певної події. Коли ми розглянули фізичну ситуацію, в якій ми хотіли б використовувати ці числа, ми виявили, що якщо числа повинні бути корисними, то ми повинні погодитися, що, наприклад,

– 2 · 3 = -6 і -2 · (–3) = 6.

Там ми домовилися оперувати позитивними і негативними числами, щоб результати відповідали фізичній ситуації. При дедуктивному підході до чисел ми доводимо на основі наших аксіом, що певні теореми вірні. Доведемо, що додатне число в рази від'ємне число є від'ємним.

Нехай a і b — додатні числа. Тоді − b — від'ємне число; наприклад, −b = −5. Доведемо, що a(− b) = −ab. Аксіомою 7, де ми дозволяємо a бути 0, ми знаємо, що якщо дано b і 0, то існує число x таке, що b + x = 0. Це число x позначається 0 − b або −b. То

b + (-b) = 0.

Тепер ми можемо помножити обидві частини цього рівняння на a, а оскільки рівні, помножені на рівних, дають рівні, то маємо, маємо

a[b + (–b)] = a · 0.

Тепер a · 0 = 0 · a [за аксіомою 3](#ch4axi3), і 0 · a = 0 за [аксіомою 5](#ch4axi5). Застосувавши дистрибутивну аксіому, [аксіому 9](#ch4axi9), до лівої частини нашого рівняння, отримаємо

образ

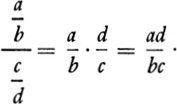
І тепер ми бачимо, що a(-b) - це число, яке додається до ab дає 0. Але [Аксіома 7](#ch4axi7) говорить, що при ab і 0 (це a і b [аксіоми 7](#ch4axi7)), існує унікальне число x таке, що

образ

Це число x позначається 0 − ab або −ab. Але [рівняння (1)](#eq_4_1a)  говорить, що a(-b) - це число, яке додається до ab, дає 0. Оскільки існує лише одне таке число, яке при додаванні до ab дає 0, і це число, яке ми знаємо, є -ab, має бути, що a(-b) = -ab.

Доказ зараз повний і все ж може бути непереконливим. Причина просто в тому, що ми настільки звикли оперувати числами на основі фізичних аргументів і досвіду роботи з ними, що не звикли міркувати з числами на аксіоматичній основі.

Розглянемо ще один доказ. [У розділі 4-2 ми](#ch4_2)  навели фізичний аргумент, щоб показати, що якщо ми ділимо a/b на c/d, то ми можемо отримати відповідь, інвертуючи c/d для отримання d/c, а потім множачи; тобто,



Ми можемо довести, виходячи з наших аксіом, що це правило перевертання знаменника і подальшого множення є правильним.

Розділити a/b на c/d означає знайти число x таке, що

образ

[Тепер Аксіома 8](#ch4axi8) говорить нам, що існує унікальне число x , яке задовольняє такому рівнянню. Ми це знаємо

образ

Тому що якщо ми скасуємо загальні множники в чисельнику і знаменнику правої частини, ми отримаємо A/B. Отже, одне число, яке може служити x, яке задовольняє [рівняння (3),](#eq_4_3a) є ad/bc. Але оскільки значення x є унікальним, x = ad/bc. Таким чином, результатом ділення a/b на c/d є ad/bc. Відзначимо, що відповідь ad/bc виходить шляхом множення a/b на обернене c/d. Отже, щоб розділити один дріб на інший, ми інвертуємо знаменник і множимо.

Цей доказ, як і попередній, може бути непереконливим, і причина та ж. Ми не звикли міркувати про числа на аксіоматичній основі. Скоріше, ми покладалися на фізичний зміст чисел і операцій. Історично склалося так, що математики робили те ж саме. Вони навчилися оперувати числами, відзначаючи, як використовуються числа, і вони будували аксіоматичний базис ще довго після цього, просто щоб переконатися, що можна зробити дедуктивні докази властивостей чисел.

Оскільки ми теж з дитинства звикли до властивостей і операцій з числами, і впевнені в цих властивостях, то не будемо часто наводити аксіоми, щоб виправдати свої кроки. Таким чином, якщо ми запишемо 3 a замість a · 3, ми не будемо наводити комутативну аксіому множення як обґрунтування цього кроку. Насправді, було б педантично це зробити. Аксіоми корисні, скоріше, допомагаючи нам визначити, що правильно, коли наш досвід підводить нас або залишає нас у сумнівах. Однак не слід випускати з уваги той факт, що математика, побудована на системі числення, є дедуктивною системою. Цей момент потребує акценту, тому що ми починаємо вивчати арифметику в ранньому віці по роту, а потім ми схильні оперувати числами механічно, не сприймаючи, що ми постійно використовуємо аксіоми чисел.

#### ВПРАВИ

1. Чи вірите ви, що

256(437 + 729) = 256 · 437 + 256 · 729?

Чому?

2. Чи правильно стверджувати, що

a(b − c) = ab − ac?

[Пропозиція: b − c = b + (−c).]

3. Виконайте операції, передбачені в наступних прикладах:

а) 3а + 9а

б) а · 3 + а · 9

c) образ

г) 7а − 9а

д) 3(2а + 4б)

е) (4а + 5б)7

ж) а(а + б)

h) a(a − b)

і) 2(8а)

j) a(ab)

4. Проведіть множення:

(а + 3)(а + 2).

[Пропозиція: Розгляньте (a + 3) як єдину величину і застосуйте дистрибутивну аксіому.]

5. Обчисліть (n + 1 )(n + 1).

6. Якщо 3х = 6, то хіба х = 2? Чому?

7. Якщо 3х + 2 = 7, то 3х = 5? Чому?

8. Чи правильна рівність x2 + xy = x(x + y)?

9. Чи правильно стверджувати, що

a + (bc) = (a + b)(a + c)?

образ 4–6 ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

Дещо з сили, методології та тонкості математичних міркувань вже можна побачити в додатках, які були зроблені з декількох типів чисел. Дійсно, ми побачимо, що це призвело до значних наукових відкриттів.

Почнемо з деяких досить простих справ. Припустимо, людина керує автомобілем одну милю зі швидкістю 60 миль на годину і ще одну милю зі швидкістю 120 миль на годину. Яка у нього середня швидкість? Ми схильні відповідати на це питання, застосовуючи загальну процедуру знаходження середнього значення. Таким чином, якщо чоловік купує одну пару взуття за $5, а іншу за $10, середня ціна $5 + $10 поділити на 2, або $7,50. Звідси здавалося б, ніби середня швидкість у вищезгаданій задачі повинна бути 60 + 120, поділена на 2, або 90 миль на годину. Однак ця відповідь не є коректним. Число 90 є середнім в арифметичному сенсі, але це не те середнє значення, яке ми шукаємо. Середня швидкість повинна бути такою швидкістю, яка дозволила б людині проїхати дві милі за той же час, коли їй знадобилося, щоб проїхати цю відстань з двома різними швидкостями. Тепер чоловікові знадобилося 1 хвилина, щоб проїхати першу милю, і йому знадобилася образ хвилина, щоб проїхати другу милю. Отже, йому знадобилося 1образ хвилина, щоб проїхати 2 милі. Тепер ми запитуємо, яка середня швидкість, підтримувана протягом 1 хвилини,образ подолала б 2 милі? Оскільки середня швидкість, помножена на загальний час, повинна давати загальну відстань, середня швидкість - це загальна відстань, поділена на загальний час, тобто

образ

Середня швидкість тоді становить образ милі на хвилину або 80 миль на годину.

Суть цього прикладу, не важливого, щоб бути впевненим, полягає лише в тому, що бездумне, сліпе застосування арифметики не дає правильного результату. Поняття середньої швидкості служить фізичній меті, і якщо ми не уявляємо ясно, що має означати середня швидкість, ми не отримаємо прибутку від використання арифметики.

#### ВПРАВИ

1. Людина може гребти човном у негазованій воді зі швидкістю 6 миль/год. Він планує гребти вгору за течією протягом 12 миль, а потім назад у річку, течія якої тече зі швидкістю 2 милі / год. Таким чином, його швидкість вгору за течією становить 4 милі / год, а швидкість вниз за течією - 8 миль / год. Він пояснює, що його середня швидкість становить 6 миль / год, і тому вся поїздка в 24 милі повинна зайняти 4 години. Чи правильне це міркування?

2. Припустимо, що торговець продає яблука за ціною 2 за 5¢ і апельсини за ціною 3 за 5¢. Щоб спростити свою арифметику, він вирішує продати будь-які 5 штук фруктів за 10¢ або за середньою ціною 2¢ за штуку. Таким чином, якщо він продає 2 яблука і 3 апельсина, він продає 5 шматочків фруктів по 2¢ кожен і отримує ті ж 10¢, як якщо б він продав їх за початковими окремими цінами. Чи правильна середня ціна продавця? [Пропозиція: Подумайте, які результати, якщо він продасть 12 яблук і 12 апельсинів.]

3. Припустимо, що продавець бажає продати яблука і апельсини якомусь покупцеві за цінами, наведеними у вправі 2. Якою має бути середня ціна?

4. Враховуючи дані вправи 2, чи існує середня ціна, яка була б правильною, незалежно від того, скільки яблук і скільки апельсинів продається?

5. Одна людина може вирити певну канаву за 2 дні, а інша може вирити цю ж канаву за 3 дні. Яка їхня середня швидкість риття канави за день?

Розглянемо далі застосування простої арифметики до генетики. Припустимо, перед нами 2 червоних туза і 2 червоних короля зі звичайної колоди в 52 карти. Скільки різних пар, що складаються з одного туза і одного короля, можна зібрати разом? Оскільки кожен туз може бути в парі з будь-яким з 2 королів, для будь-якого одного туза є 2 різні пари. Так як у нас 2 туза, то є і 2 · 2 або 4 різні пари.

Тепер припустимо, що у нас є 2 червоних туза, 2 червоних короля і 2 червоних королеви. Скільки різних наборів, що складаються з одного туза, одного короля і однієї ферзя, ми можемо сформувати з даними картами? Вище ми побачили, що існує 4 різні пари асів і королів. З кожною з цих 4 пар ми можемо розмістити 2 різних маток. Звідси є 4 · 2 або 8 різних наборів по 3 карти. Відзначимо, що 4 · 2 = 2 · 2 · 2 = 2 3.

Якщо у нас є 2 червоних туза, 2 червоних короля, 2 червоних королеви і 2 червоних валета, кількість різних наборів, кожен з яких складається з одного туза, одного короля, однієї королеви і одного валета, також можна легко підрахувати. Кожен з 8 варіантів туза, короля і королеви можна поєднати з кожним з 2 валетів. Звідси є 8 · Всього 2 або 16 варіантів. Зараз

8 · 2 = 4 · 2 · 2 = 2 · 2 · 2 · 2 = 24.

Зрозуміло, що якби у нас було 10 різних пар карт і нам довелося зробити всі можливі варіанти з 10 карт, по одній з кожної пари, кількість усіх можливих наборів з 10 карт була б такою

2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 210 = 1024.

Це просте міркування про карти має важливе застосування до генетики. Статеві клітини (як і звичайні клітини) чоловічої статі людини містять 24 пари хромосом. Коли сперматозоїд утворюється з репродуктивної клітини, він містить 24 хромосоми, кожна з яких походить від однієї з 24 пар. Отже, сперматозоїд може бути сформований у 224 можливих комбінаціях. Статеві клітини людської самки також містять 24 пари хромосом. Яйцеклітина, утворена з жіночої статевої клітини, містить 24 хромосоми, кожна з яких походить від однієї з 24 пар статевої клітини. Отже, існує 224 можливих способи, за допомогою яких яйцеклітина може бути сформована. При зачатті приєднується, або запліднюється, якась одна яйцеклітина. Оскільки існує 224 можливих сперматозоїда і 224 можливих яйцеклітин, число можливих комбінацій хромосом для заплідненої яйцеклітини дорівнює

224 · 224 = 16 777 216 · 16 777 216 = 281 474 976 710 656.

Це кількість можливих варіацій генетичного складу будь-якої однієї дитини, яку можуть мати чоловік і дружина. Власне, варіацій дещо більше. Кожна хромосома містить гени, і вони визначають спадкові якості. Біологи з'ясували, що будь-які дві парні хромосоми в репродуктивній клітині можуть обмінюватися деякими генами, і цей обмін дає початок новим різновидам сперматозоїдів і яйцеклітин.

#### ВПРАВИ

1. Звичайна колода з 52 карт містить 4 різних туза і 4 різних короля. Скільки різних пар карт, кожна пара, що складається з одного туза і одного короля, може бути сформовано з тузів і королів?

2. Виробник пропонує свій автомобіль в 3 різних кольорах, з обігрівачем або без, а також з радіоприймачем або без нього. Скільки різних варіантів може зробити покупець?

3. У дівчини 3 капелюхи, 2 сукні і 2 пари взуття. Скільки у неї різних костюмів?

4. На кубику є шість чисел (однина кубиків). Скільки різних пар чисел може з'явитися під час кидка пари кубиків? Два кубики повинні бути позначені таким чином, щоб кидок 2 на один кубик (скажімо, A) і 5 на інший (скажімо B) можна було відрізнити від зворотного розташування (5 на A і 2 на B).

Ми вже обговорювали той факт, що наш метод запису величин використовує ідею позиційного числення в десятій основі (див. [Розділ 4-2](#ch4_2)). Однак деякі цивілізації використовували інші числа в якості бази. Наприклад, вавилоняни з незрозумілих причин вибрали 60. Ця система була перейнята грецькими астрономами і використовувалася в Європі для багатьох математичних і всіх астрономічних розрахунків ще в сімнадцятому столітті. Він все ще зберігся в нашій практиці поділу годин і кутів на 60 хвилин і 60 секунд. Прийнявши десять як основу, Європа наслідувала практику індусів. Давайте кинемо виклик історії і подивимося, чи зможемо ми отримати якусь перевагу від зміни нової бази.

Ми виберемо базу шість. Величини від нуля до п'яти будуть позначатися символами 0, 1, 2, 3, 4, 5, як в основі десяти. Перша істотна відмінність виникає, коли ми хочемо позначити шість об'єктів. Оскільки основою має бути шість, ми більше не будемо використовувати спеціальний символ 6, а розмістимо 1 у новій позиції, щоб позначити 1 раз основу, так само, як у базі десять 1 з 10 позначає один раз основу, або кількість десять. Отже, щоб записати шість в основу шість, ми б написали 10, але тепер символи 10 означають 1 раз шість плюс 0. Таким чином, символи 10 можуть позначати дві різні величини, залежно від використовуваної основи. Сім в основі шість буде записано 11, тому що в базі шість ці символи означають 1 раз шість + 1, так само, як 11 в базовій десятці означає 1 раз десять + 1. Знову ж таки, символи 11 представляють різні величини, залежно від мається на увазі основи. Як інший приклад, для позначення двадцяти двох в основі шість ми пишемо 34, тому що ці символи тепер означають 3 рази шість + 4.

У базі десяти, щоб записати числа, більші за дев'яносто дев'ять, ми використовуємо третю позицію, місце сотні, для позначення десятків десятків. Аналогічно в базі шість, коли ми досягаємо чисел, більших за тридцять п'ять, ми використовуємо третю позицію для позначення шісток з шісток. Таким чином, тридцять вісім буде записано в основі шість як 102, де один означає 1 раз шість шість, 0 означає 0 разів шість, а 2 означає лише 2 одиниці. Для вираження дуже великих чисел ми б використовували чотиримісні, п'ятимісні числа тощо.

Ми можемо виконати звичайні арифметичні операції в базі шість. Однак нам довелося б вивчати нові таблиці додавання та множення. Наприклад, в базовій десятці ми пишемо 5 + 3 = 8, тоді як в базовій шістці вісім потрібно записати 12. Отже, наша таблиця додавання повинна була б вказати, що 5 + 3 = 12. Аналогічно, наша нова таблиця множення повинна була б перерахувати 3 · 5 = 23, тому що п'ятнадцять дорівнює 2 · 6 + 3 або, в базі шостій, 23. Коли ми навчилися користуватися базовим десятком, нам довелося запам'ятовувати результат додавання кожного числа від 0 до 9 до кожного числа від 0 до 9, а результат множення кожного числа від 0 до 9 з кожним числом від 0 до 9. Для основи шість нам довелося б навчитися додавати (і множити) тільки числа від 0 до 5 до (або з) чисел цього набору. Таким чином, наші таблиці додавання та множення були б коротшими, і ми б вивчали арифметику раніше, будучи молодими. Ми можемо навіть подолати бар'єр арифметики так легко, що нам може сподобатися математика. Єдиним недоліком бази шість було б те, що для представлення великих величин нам довелося б використовувати більше цифр. Наприклад, число п'ятдесят чотири, записане як 54 в основі десяти, повинно бути записано як 130 в базі шість, тому що п'ятдесят чотири дорівнює 1 · 62 + 3 · 6 + 0.

Є люди, які виступають за прийняття бази дванадцяти, тому що вона пропонує особливі переваги. По-перше, більше дробів можна записати як скінченні десяткові дроби в основі дванадцять. Таким чином, образ слід записати як нескінченний десятковий знак 0,333. . . в базі десяти, але може бути записана як 0,4 в базі дванадцять, так як в цій базі 0,4 означає образ. Крім того, оскільки англійська система позначення довжини закликає до 12 дюймів в одному футі, ми могли, наприклад, виразити 3 фути і 6 дюймів як 36 дюймів в базових дванадцяти, тоді як для вираження цієї кількості дюймів в базовій десятці ми повинні спочатку обчислити 3 · 12 + 6, а потім напишіть 42 в базовій десятці. В обмеженій мірі ми могли б використовувати базові дванадцять у нашому методі запису часу. У Сполучених Штатах день має два набори по дванадцять годин, а в базових дванадцяти годинах дня буде працювати від 0 до 20. У той час як визначення того, що буде 7 годин після 6 години, вимагає в даний час деяких обчислень, під таблицею додавання для бази дванадцяти ми відразу заявимо, що 7 + 6 = 11. Однак база десять зараз настільки широко використовується, що навряд чи можливий перехід на іншу базу для звичайного щоденного використання або комерції.

У темі баз ми маємо ідею, яка переслідувалася протягом століть, в основному як цікава і забавна спекуляція, але яка раптом стала дуже важливою в науці і навіть у комерційному світі. Протягом декількох століть математики працювали над конструюванням машин, які могли б швидко виконувати арифметичні обчислення і, таким чином, усунути значну частину важкої арифметичної роботи. Хоча деякі види обчислювальних машин були винайдені і використовувалися, математики побачили свою золоту можливість в електронних пристроях, розроблених сучасними радіоінженерами. Ключем є радіовакуумна трубка, яку можна змусити пропускати струм, подавши на нього напругу або можна тримати неактивною. Таким чином, можливі два маневри. У двох базових числах потрібні лише два символи, 0 і 1. Типовим числом буде 1011, що означає

1 · 23 + 0 · 22 + 1 · 2 + 1.

Це число може бути записане машиною, використовуючи чотири трубки, одну для місця одиниць, іншу для кратних 2, третю для кратних 22 і четверту для кратних 23. Для запису 1011 можна активувати першу, другу і четверту трубки, а третю, яка записує третє місце в номері, залишити неактивною. Струми, що проходять трубками, які «горять», реєструються машиною в спеціальних ланцюгах. Потім в машину можна подати інше число. Припустимо, що його потрібно додати до першого числа. Результат наявності двох l в одному місці означає, в основі 2, що сума повинна бути 0 і a 1 перенесена на наступне місце. Ця операція легко виконується ланцюгами. Хоча цей опис електронного комп'ютера, безумовно, не представляє геніальних ідей, які включили інженери та математики, ми, можливо, побачимо, що робота вакуумної лампи ідеально підходить для операцій у другій базі.

Щоб скористатися тим, що комп'ютери можуть виконувати обчислення в базі два, числа, над якими потрібно працювати, заздалегідь перетворюються з базової десяти в базову дві, а потім подаються на машину разом з іншими інструкціями. Потім машина працює на цій останній базі. Результат, звичайно, перетворюється в базовий десять.

Оскільки комп'ютери працюють зі швидкістю мікросекунд, вони надзвичайно цінні в будь-якій комерційній або промисловій організації, яка повинна обробляти багато числових даних. Розрахунки в банках, страхових компаніях і в промисловості, яка раніше вимагала величезної кількості людської праці, тепер виконуються машинами. Комп'ютери є першими в новій серії машин, які відстежують велику кількість даних, вибирають інформацію з мільйонів карт, на яких записуються дані, планують заводські операції, безпосередньо машини, і незабаром можуть забезпечити переклад іншомовних публікацій.

Електронні обчислювальні машини є величезним благом для науки і математики. Арифметика, необхідна для вилучення конкретної інформації з математичних формул, часто настільки довга, що на виконання цих обчислень пішли б роки. Обчислювальні машини виконують таку роботу за години. Більше того, математики більше не соромляться працювати над проблемами, які призведуть до великих обчислень, адже тепер вони знають, що їхня праця не буде марним.

Обчислювальні машини можуть допомогти нам дізнатися більше про дію людського мозку. На думку біологів, нервові клітини в нервових ланцюгах і клітини нашого мозку реагують на електричні імпульси так само, як це робить вакуумна трубка. Подібно до того, як трубка «спрацьовує», коли отримує електричний струм понад певне мінімальне значення, і залишається неактивною в іншому випадку, так і нервові клітини в нервових ланцюгах передають електричний імпульс до будь-якого органу, який вони можуть вести, коли цей імпульс перевищує порогове значення; в іншому випадку вони неактивні. Обчислювальні машини також мають пам'ять; Тобто часткові результати обчислень зберігаються автоматично в спеціальному пристрої, званому пам'яттю. Коли ці результати потрібні, пристрій пам'яті відпускає їх. Таким чином, результат процесу додавання може зберігатися в пристрої пам'яті до тих пір, поки не буде отриманий результат деякого процесу множення, а потім, якщо це буде доручено, машина додасть ці два результати. Таким чином, пристрій пам'яті машини функціонує дещо подібно до людської пам'яті. Отже, принаймні у двох аспектах електронні обчислювальні машини моделюють дії людських нервів і пам'яті. Хоча машини за швидкістю, точністю і витривалістю перевершують людський мозок, не слід робити висновок, як зараз припускають багато популярних письменників, що машини в кінцевому підсумку замінять мозок. Машини не думають. Вони виконують розрахунки, які їм доручено виконувати людям, які мають мозок, щоб знати, які розрахунки потрібні. Проте ми, безсумнівно, маємо в машині корисну модель для дослідження деяких функцій людського мозку і нервів.

#### ВПРАВИ

1. Побудуйте таблицю додавання для основи шість.

2. Побудуйте таблицю множення для основи шість.

3. Побудуйте таблицю додавання і множення для другої основи.

4. У десятій базі знаходяться такі номери:

9, 10, 12, 36, 48, 100.

Запишіть відповідні величини в основу шість.

5. У шостій базі наведені такі номери:

5, 10, 12, 20, 100.

Запишіть відповідні величини в базову десятку.

6. Запишіть дріб образ десятковим числом в основі шість.

7. Кількість 0,2 знаходиться в базі шість. Запишіть відповідну величину в основу десяту.

8. Число 101 записується в деяку невідому основу і дорівнює десяти. Що таке база?

9. Знайдіть найменшу кількість ваг, необхідну для зважування, до найближчого фунта, предметів вагою від 0 до 63 фунтів. Ваги, які будуть використовуватися, містять дві каструлі, а ваги повинні бути поміщені в одну каструлю. [Пропозиція: Розглянемо задачу представлення всіх чисел від 0 до 63 в основі 2.]

Деякі з найбільш чудових застосувань чисел, які призвели до глибоких відкриттів, виявляються при вивченні будови речовини. На початку і в середині дев'ятнадцятого століття деякі основні експериментальні факти про різновиди матерії, знайдені в природі, привели, після деяких неминучих суперечок з боку Джона Дальтона, Амадео Авогадро і Станіслава Канніццаро, до теорії, що вся матерія складається з атомів. Таким чином, водень, кисень, хлор, мідь, алюміній, золото, срібло і всі інші різновиди речовини складаються з атомів. Були розроблені експериментальні методики вимірювання відносних ваг атомів різних елементів. Зручною одиницею ваги була обрана образ вага атома кисню , щоб вага атома кисню дорівнював 16. Вага атома водню тоді виявилася 1,0080, ваги міді 63,54, золота 197,0 і так далі. До цього часу також було визначено ряд хімічних властивостей цих різних елементів, таких як температури плавлення, температури кипіння і здатність з'єднуватися з іншими елементами з утворенням сполук.

Питання, яке почало хвилювати хіміків, полягало в тому, чи існує якийсь закон або принцип, який використовує атомні ваги цих елементів. Вінцеве відкриття було зроблено в 1869 році Дмитром Івановичем Менделєєвим (1834-1907). Коли він почав розташовувати елементи в порядку збільшення атомної ваги, він виявив, що кожен восьмий елемент, починаючи з даного, має хімічні властивості, схожі з першим. Таким чином, гази фтор і хлор, останній восьмий елемент, починаючи з фтору, легко з'єднуються з металами. Однак, продовжуючи розміщувати кожен з 63 різних елементів, відомих у його час, на восьмій позиції після того, який має подібні хімічні властивості, він побачив, що йому довелося залишити порожні місця. Менделєєв був настільки вражений періодичністю хімічних властивостей, що не вагаючись залишив порожні місця і стверджував, що повинні бути елементи, щоб заповнити ці простори. Оскільки кожен з цих відсутніх елементів повинен мати хімічні властивості, аналогічні властивостям елемента, знайденого у восьмій позиції, що передує або слідує за відсутнім елементом, він може навіть передбачити деякі властивості невідомих елементів. Менделєєв описав властивості трьох відсутніх елементів, а його безпосередні наступники виявили їх. Зараз їх називають скандієм, галієм і германієм. Ще пізніше були знайдені інші. Цікавий факт роботи Менделєєва з математичної точки зору полягає в тому, що у нього не було фізичного пояснення того, чому елементи, віддалені один від одного, повинні мати схожі хімічні властивості. Він знав лише, що число вісім було ключем до аранжування, і сумлінно слідував цьому математичному керівництву. Ще довго після часів Менделєєва були знайдені інші елементи, наприклад, гелій, які не вписуються в цю схему, але його періодична таблиця все ще залишається основною, яку сьогодні вивчають всі учні хімії.

Проста арифметика продовжувала грати провідну роль в наступних розробках атомної теорії. Триваюче вивчення атомних ваг різних елементів і їх хімічних властивостей показало, що елементи, які раніше вважалися чистими, насправді не були такими. Таким чином, існує два види водню. Вони мають подібні хімічні властивості, але різні атомні ваги; Насправді один в два рази важчий за інший. Оскільки обидва раніше називалися воднем, і оскільки вони, в будь-якому випадку, мають схожі хімічні властивості, ці дві форми водню називаються ізотопами водню. Так само існує не одна речовина, кисень, а три, атомних ваг 16, 17 і 18. Уран, дуже важливий елемент сьогодні, має два ізотопи атомних ваг 238 і 235.

Вражаючий факт, який з'явився в результаті відкриття ізотопів, полягає в тому, що коли розрізняються всі ізотопи і визначається відносна вага різних елементів, вага будь-якого одного елемента знаходиться в межах 1% від цілого числа. Такий факт навряд чи може бути випадковим. Пояснення, здавалося б, полягає в тому, що всі ці елементи дійсно кратні одному елементу, а саме легшому ізотопу водню, який має найменшу вагу з усіх елементів. Іншими словами, різні елементи, які раніше здавалися абсолютно різними речовинами, тепер розглядалися як просто менші або більші сукупності одного і того ж елемента, але розташовані особливим чином, властивим цій речовині. (Строго кажучи, фундаментальним будівельним блоком є не легший ізотоп водню, а те, що зараз називають протоном. Легший ізотоп водню також має електрон, вага якого незначна в порівнянні.)

Якщо всі різні елементи насправді є просто агрегатами більш легкого атома водню, повинна бути можливість видалити деякі атоми і перетворити одну речовину в іншу. Таким чином, ми повинні мати можливість перетворити ртуть, яка є наступним важчим елементом після золота, в золото. І ми можемо. Те, що середньовічні алхіміки сподівалися зробити на містичних і поверхневих підставах, тепер ми можемо зробити на основі набагато кращих наукових знань. На жаль, вартість перетворення ртуті в золото занадто велика, щоб зробити її вартою. Але у нас є застосування для трансмутації елементів, які в наш час цінуються більше і які ми опишемо за мить.

Вчений, який володіє теорією, не може дозволити собі не помітити навіть одну деталь, як це може здатися тривіальною, яка не узгоджується з його теорією. Якщо всі елементи є просто комбінаціями легшого атома водню, то їх вага повинна бути точною, кратною вазі цього атома, а не мати значень в межах 1% від такої ваги. (Електрони в атомах не враховують різницю.) Цю невідповідність необхідно пояснити. Найлегшому ізотопу кисню, дещо довільно, було надано вагу 16. При такому досить довільному стандарті легший атом водню має вагу 1, 008, а не рівно 1. Але гелій, який складається з 4 атомів водню, виявляється вагою 4, 0028. Однак якщо він складається з 4 атомів водню, його атомна вага повинна бути в 4 рази більше 1, 008, або 4, 032. Різниця, 4,032 – 4,0028, або близько 0,03, є розбіжністю, яку необхідно враховувати. Тепер так сталося, що Ейнштейн, працюючи в зовсім іншій області, теорії відносності, вже показав, що масу можна перетворити в енергію. Енергія може приймати різні форми. Це може бути тепло, створене при спалюванні вугілля або дров, або це може бути випромінювання, яке надходить до нас від сонця. На даний момент точна форма його значення не має. Що має значення, так це думка, яка прийшла в голову вченим, що, можливо, коли 4 атома водню зливаються з утворенням гелію, відсутні 0,03 речовини перетворюються в енергію в процесі. Звідси злиття елементів має вивільняти енергію. І експерименти показали, що так і відбувається. Енергія, яка вивільняється, називається енергією зв'язку, і саме ця енергія виділяється при вибуху водневої бомби.

У цьому короткому викладі ролі арифметики в хімії та атомній теорії ми майже нічого не сказали про велике мислення та блискучі експерименти, які внесли фізики та хіміки. Наш інтерес полягав у тому, щоб показати, як використання простих чисел постачає вчених потужним інструментом. Звичайно, математика чисел ще належить розвинути, і ми дізнаємося, скільки ще можна досягти за допомогою трохи більш досконалих інструментів. Але ми вже бачимо дещо з того, що передбачали піфагорійці, коли говорили про числа як про сутність реальності.

#### ОГЛЯД ВПРАВ

1. Розрахуйте:

a) образ

b) образ

c) образ

d) образ

e) образ

f) образ

g) образ

h) образ

i) образ

j) образ

k) образ

2. Розрахуйте:

a) образ

b) образ

c) образ

d) образ

e) образ

f) образ

g) образ

h) образ

i) образ

j) образ

k) образ

l) образ

m) образ

n) образ

о) −8 ÷ −2

3. Розрахуйте:

а) (2 · 5) (2 · 7)

б) 2а · 2б

в) 2а · 3б

г) 2x · 3р

д) 2x · 3y · 4z

4. Розрахуйте:

a) образ

b) образ

c) образ

d) образ

e) образ

5. Розрахуйте:

a) образ

b) образ

c) образ

d) образ

e) образ

f) образ

g) образ

h) образ

6. Спростіть:

a) образ

b) образ

c) образ

d) образ

e) образ

f) образ

g) образ

h) образ

7. Запишіть у вигляді дробу:

а) 0,294

б) 0,3742

в) 0,08

г) 0,003

8. Приблизне правильним числом до 1 знака після коми:

a) образ

b) образ

c) образ

9. Чи справедливі наступні рівняння для всіх значень a і b? [Пропозиція: Якщо ви хочете спростувати загальне твердження, достатньо показати один випадок, коли воно не виконується.]

а) 2(а + б) = 2а + 2б

б) 2ав = 2а · 2б

c) образ

d) образ

e) образ

f) образ

g) образ

h) образ

i) образ

10. Запишіть наступні цифри в позиційних позначеннях, але в основі 2. Єдиними цифрами, які можна використовувати в базі 2, є 0 і 1.

а) 1

б) 3

в) 5

г) 7

д) 8

е) 16

ж) 19

11. У базі 2 наведені наступні номери. Запишіть відповідні величини в базу 10.

а) 1

б) 101

в) 110

г) 1101 р.

д) 1001 р.

##### Теми для подальшого вивчення

1. Єгипетський метод запису цілих чисел і дробів.

2. Вавилонський метод запису цілих чисел і дробів.

3. Римський метод запису цілих чисел і дробів.

4. Основні арифметичні закони атомної теорії. (Використовуйте посилання на Холтона і Роллера, а також на Боннера і Філліпса).

5. Теорія чисел Піфагора.

##### Рекомендована література

БОЛЛ, В. В. РОУЗ: Короткий звіт з історії математики, Chaps. 1 і 2, Dover Publications, Inc., Нью-Йорк, 1960.

БОННЕР, Ф. Т. і М. П.ХІЛЛІПС: Принципи фізичної науки, Chap. 7, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Редінг, штат Массачусетс, 1957.

КОЛЕРУС, ЕГМОНТ: Від простих чисел до обчислення, Chaps. 1-8, Wm. Heineman Ltd., Лондон, 1954.

DANTZIG, TOBIAS: Number, the Language of Science, 4th ed., Chaps. 1-6, The Macmillan Co., New York, 1954 (також у м'якій обкладинці).

Девіс, Філіп Дж.: Знання великих чисел, Random House, Нью-Йорк, 1961.

EVES, HOWARD: Вступ до історії математики, Rev. ed., pp. 29–64, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1964.

ГАМОВ, ДЖОРДЖ: Один два три... Нескінченність, ч. 9, Нова американська бібліотека, Нью-Йорк, 1953.

ХОЛТОН, Г. і Д. Х. Д. Р ОЛЛЕР: Основи сучасної фізичної науки, Chaps. 22 і 23, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Редінг, штат Массачусетс, 1958.

Джонс, Бертон В.: Елементарні поняття математики, Chaps. 2 і 3, The Macmillan Co., Нью-Йорк, 1947.

СМІТ, ДЕВІД ЮДЖИН: Історія математики, т. I, с. 1–75, т. II, ч. 1-4, Dover Publications, Inc., Нью-Йорк, 1953.

[\*](#ipg82fn1) Розділи та глави, позначені зірочками, можна пропустити, не порушуючи математичної безперервності.